UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Minor 1st Semester Examination, 2023

UMATMIN10001-MATHEMATICS

CLASSICAL AND LINEAR ALGEBRA

Time Allotted: 2 Hours 30 Minutes | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any *four* questions: 3×4 = 12
   যে-কোনো *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও:
   कुनै *चारवटा* प्रश्नका उत्तर देऊ:

   (a) If a be a non-zero complex number and z be any complex number, then define a^z. What is the principle value of a^z? 2+1
   a একটি অশূন্য (non-zero) জটিল সংখ্যা এবং z যে কোন একটি জটিল সংখ্যা হলে a^z এর সংজ্ঞা দাও। a^z-এর মুখ্যমান কত ?
   $a(a \neq 0)$ अनि z जटिल (complex) संख्याहरू भए a^z को परिभाषा देऊ । a^z को प्रमुख (principle) मान भनेको के हो ?

   (b) Apply Descarte's rule of sign to find the nature of the roots of the equation
   $$x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$$
   $x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করতে Descarte's rule of sign ব্যবহার করো।
   समीकरण $x^4 + 2x^2 + 3x - 1 = 0$ को मूलहरूको प्रकृति, Descarte's rule of sign को सहायताले, निर्णय गर ।

   (c) Prove that zero is an eigenvalue of a singular matrix.
   প্রমাণ করো যে, শূন্য হল একটি সিঙ্গুলার ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান।
   शून्य एउटा singular मेट्रिक्सको eigen मान हो भनी प्रमाण गर ।

   (d) Define consistent system of equations. Show that the following system of linear equations has infinite number of solutions: 1+2
   Consistent system of equations-এর সংজ্ঞা দাও। দেখাও যে, নিম্নলিখিত একঘাতিক সমীকরণের সিস্টেমটির অসংখ্য সমাধান আছে।
   समीकरणहरूको Consistent system भनेको के हो ? तलको समीकरण समूहको अनन्त समाधानहरू छन् भनी प्रमाण गर:
   $$x_1 - 2x_2 = 674$$
   $$3x_1 + 6x_2 = 2022$$

   (e) Define rank of a matrix. Find the rank of the following matrix: 1+2
   একটি ম্যাট্রিক্সের Rank-এর সংজ্ঞা দাও। নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির rank বের করোঃ
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mahaguri College Library

मेट्रिक्सको Rank भनेको के हो ? मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ को rank निर्णय गर।

(f) If a, b, c, d be positive real numbers, then find the minimum value of 2+1

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$$

When does the minimum value occur?

यदि a, b, c, d धनात्मक वास्तव संख्या হয়, তবে $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ -এর ক্ষুদ্রতম মান বের করো।

কখন ক্ষুদ্রতম মান occur করে ?

a, b, c, d धनात्मक वास्तविक संख्याहरू भए $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ को न्यूनतम मान निर्णय गर।

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}$ को न्यूनतम मान कहिले पाइन्छ ?

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

2. Answer any *four* questions: 6×4 = 24
যে-কোনো *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও:
कुनै *चार* प्रश्नका उत्तर देऊ:

(a) If $\tan\left(i\log\frac{x-iy}{x+iy}\right)=2$, then prove that $x^2-y^2=xy$. 6

যদি $\tan\left(i\log\frac{x-iy}{x+iy}\right)=2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x^2-y^2=xy$

यदि $\tan\left(i\log\frac{x-iy}{x+iy}\right)=2$ भए, प्रमाण गर: $x^2-y^2=xy$

(b) If x, y, z are positive real numbers and $x+y+z=1$, prove that 6
যদি x, y, z ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা এবং $x+y+z=1$ হয়, তবে প্রমাণ করো যে,
x, y, z धनात्मक वास्तविक संख्याहरू भए अनि $x+y+z=1$ भए प्रमाण गर:

$$8xyz \le (1-x)(1-y)(1-z) \le \frac{8}{27}$$

(c) Obtain a row echelon matrix which is row equivalent to 5+1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

and hence find its rank.

একটি Row-echelon matrix বের করো যা $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ এর সাথে Row সমতুল্য এবং

ইহা হইতে এই ম্যাট্রিক্সটির Rank বের করো।

Mayaguri College Library

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$ সঁগ row equivalent হুনে এওটা row echelon মেট্রিক্স নির্ণয় গর সাথে ত্যসকো rank নির্ণয় গর।

(d) State Cayley-Hamilton theorem. Use it to find the inverse of the following matrix: 1+5
Cayley-Hamilton theorem-টি বিবৃত করো। এটি ব্যবহার করে নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সের inverse বের করো:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Cayley-Hamilton উপপাদ্য উল্লেখ গর। ত্যসকো সহায়তালে মেট্রিক্স $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ কো inverse নির্ণয় গর।

(e) If α, β, γ be the roots of the equation $2x^3+3x^2-x-1=0$, find the equation whose roots are $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$, $\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$ and $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$. 6

যদি α, β, γ, $2x^3+3x^2-x-1=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে যে সমীকরণের বীজ $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$, $\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ সেটি বের করো।

α, β, γ সমীকরণ $2x^3+3x^2-x-1=0$ কো মূলহরু মএ ত্যো সমীকরণ জসকো মূলহরু $\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$, $\frac{\gamma+\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$ হুন্ছ, নির্ণয় গর।

(f) Solve by Cardan's method $x^3-3x-1=0$. Hence find $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$. 5+1

Cardan's method-এর সাহায্যে $x^3-3x-1=0$ সমীকরণটি সমাধান করো। অতঃপর $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$-এর মান বের করো।

Cardan কো পদ্ধতিদ্বারা সমাধান গর: $x^3-3x-1=0$ সাথে $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$ কো মান নির্ণয় গর।

GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

3. Answer any *two* questions: 12×2 = 24
যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও:
কুনৈ দুইবটা প্রশ্নকা উত্তর দেক:

(a) (i) State De Moivre's theorem for integer and rational indices. Use it to prove that, 2+6
ঋনাত্মক এবং মূলদ সূচকের জন্য De Moivre's theorem-টি বিবৃতি করো। এটি ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে,
পূর্ণসংখ্যা অনি rational indices কো নিম্তি De Moivre's theorem উল্লেখ গর। ত্যসকো সহায়তালে প্রমাণ গর:

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

Mayaguri College Library

(ii) Find mod z and arg z where $z = 1 + i\tan\frac{3\pi}{5}$. 2+2

mod z এবং arg z বের করো যেখানে $z = 1 + i\tan\frac{3\pi}{5}$।

$z = 1 + i\tan\frac{3\pi}{5}$ भए mod z अनि arg z को मानहरू निर्णय गर।

(b) (i) Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix 6

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের আইগেন (eigen) মানগুলি ও অনুবাদ আইগেন ভেক্টরগুলি বের করো।

मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ को eigen मानहरू अनि त्यसकै अनुरूप eigen सदिशहरू निर्णय गर।

(ii) Determine all values of $(1+\sqrt{3}i)^{\frac{3}{4}}$ and show that their product is 8. 4+2

$(1+\sqrt{3}i)^{\frac{3}{4}}$-এর মানগুলি বের করো এবং দেখাও যে তাদের গুণফল হল 8।

$(1+\sqrt{3}i)^{\frac{1}{4}}$ को सबै मानहरू निर्णय गर अनि तिनीहरूको गुणनफल 8 हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(c) (i) Solve the system of linear equations given by: 6

নিচের একমাত্রিক সমীকরণের সিস্টেমটি সমাধান করোঃ

रैखिक समीकरण समूह समाधान गर:

$$2x + 4y + 6z + 4w = 4,\ 2x + 5y + 7z + 6w = 3,\ 2x + 3y + 5z + 2w = 5$$

(ii) If A and B be invertible matrices of the same order then show that AB is invertible and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Hence show that $(A^{20})^{-1} = (A^{-1})^{20}$. 4+2

যদি A এবং B সমমাত্রিক invertible ম্যাট্রিক্স হয়, তবে দেখাও যে AB invertible এবং $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$। অতঃপর দেখাও যে, $(A^{20})^{-1} = (A^{-1})^{20}$।

समान order भएको A अनि B invertible मेट्रिक्सहरू भए AB invertible हुन्छ अनि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ हुन्छ भनी प्रमाण गर। साथै प्रमाण गर: $(A^{20})^{-1} = (A^{-1})^{20}$

(d) (i) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 + qx + 1 = 0$, find the equation whose roots are 6

যদি $x^3 + qx + 1 = 0$ সমীকরণের α, β, γ বীজ হয়, তবে এমন একটি সমীকরণ বের করো যার বীজগুলি হল

समीकरण $x^3 + qx + 1 = 0$ को α, β, γ मूलहरू भए, त्यो समीकरण निर्णय गर जसको मूलहरू

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta},\ \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma}$$

(ii) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3 + qx + 1 = 0$, then prove that 2+4

যদি $x^3 + qx + 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলো α, β, γ হয়, তবে প্রমাণ করো যে,

α, β, γ समीकरण $x^3 + qx + 1 = 0$ को मूलहरू भए, प्रमाण गर:

(I) $\Sigma\alpha^3 = -3$

(II) $\Sigma\alpha^5 = 5q$.

———×———

Mayabauri College Library