'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 3rd Semester Examination, 2023

DSC1/2/3-P3-MATHEMATICS

ALGEBRA

(REVISED SYLLABUS 2023)

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any *four* questions: 3×4 = 12

যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***चारवटा*** प्रश्नका उत्तर देऊ :

(a) Show that 0 is an eigenvalue of a matrix A if and only if A is singular. 3

প্রমাণ কর যে 0 , A ম্যাট্রিক্সের আইগেন মান হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি A ম্যাট্রিক্সটি স্বকীয় হয়।

मेट्रिक्स A को 0 एउटा eigenvalue भएमात्र A singular हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(b) Find the values of $(1+i)^{1/3}$. 3

$(1+i)^{1/3}$ -এর মানগুলি নির্ণয় কর।

$(1+i)^{1/3}$ को मानहरू निर्णय गर।

(c) If $A=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -8 & 6\end{pmatrix}$, then using Cayley-Hamilton theorem, show that $A^{20}=2^{19}\cdot A$. 3

ক্যালি-হ্যামিল্টন উপপাদ্য ব্যবহার করে দেখাও যে $A^{20}=2^{19}\cdot A$, যেখানে $A=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -8 & 6\end{pmatrix}$।

$A=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -8 & 6\end{pmatrix}$ भए, Cayley-Hamilton को उपपाद्य प्रयोग गरी प्रमाण गर : $A^{20}=2^{19}\cdot A$.

(d) Prove that the composition of two mappings is associative. 3

প্রমাণ কর যে দুইটি অপেক্ষকের সন্ধি সর্বদা সহযোগী হয়।

दुईवटा map हरूको composition associative हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(e) Prove that 9 divides $3\cdot 4^{n+1}-3$ for all positive integers n. 3

প্রমাণ কর যে $3\cdot 4^{n+1}-3$ রাশিটি সমস্ত ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্য 9 দ্বারা বিভাজ্য।

सबै धनात्मक पूर्णसंख्या n को निम्ति 9 ले $3\cdot 4^{n+1}-3$ लाई भाग गर्छ भनि प्रमाण गर।

(f) Give an example of a binary relation which is reflexive and symmetric but not transitive. 3

একটি দ্বৈত সম্পর্কের উদাহরণ দাও যাহা reflexive এবং symmetric কিন্তু transitive নয়।

Reflexive अनि symmetric हुने तर transitive नहुने एउटा द्विक (binary) सम्बन्धको उदाहरण देऊ।

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

2. Answer any ***four*** questions: 6×4 = 2

যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***चारवटा*** प्रश्नका उत्तर देऊ :

(a) (i) Apply Descarte's rule of sign to determine the nature of the roots of the equation $x^4+16x^2+7x-10=0$.

ডেকার্টসের চিহ্নের সূত্র ব্যবহার করে নিম্নলিখিত সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করঃ

$$x^4+16x^2+7x-10=0$$

Descarte को चिन्हहरूको नियम द्वारा समीकरण $x^4+16x^2+7x-10=0$ को मूलहरूको प्रकृति निर्णय गर।

(ii) Solve the equation $x^3-3x^2-6x+8=0$ if the roots are in A.P.

$x^3-3x^2-6x+8=0$ সমীকরণটি সমাধান কর যদি উহার বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে।

समीकरण $x^3-3x^2-6x+8=0$ को मूलहरू अंकगणितीय प्रगति (AP) मा रहेको छ भने मूलहरू निर्णय गर।

(b) (i) Solve by Cardan's method: $x^3-18x-35=0$.

কার্ডানের পদ্ধতি ব্যবহার করে $x^3-18x-35=0$ সমীকরণটি সমাধান কর।

Cardan को पद्धतिद्वारा समाधान गर : $x^3-18x-35=0$

(ii) State the Fundamental theorem of classical algebra.

শাস্ত্রীয় বীজগণিতের মৌলিক উপপাদ্যটি বিবৃত কর।

Fundamental Theorem of Classical Algebra उल्लेख गर।

(c) Let a and b be two integers and m be a positive integer. Prove that if $a \equiv b \pmod{m}$ then $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ for any positive integer n. Is the converse of this statement true? Justify your answer. 3+3

ধর a এবং b দুইটি পূর্ণসংখ্যা এবং m হল একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। প্রমাণ কর যদি $a \equiv b \pmod{m}$ হয় তাহলে যেকোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্যে $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ হবে। ইহার বিপরীত বিবৃতিটি কি সত্য ? যুক্তি সহকারে উত্তর দাও।

a अनि b पूर्णसंख्याहरू अनि m चाहिँ धनात्मक पूर्णसंख्या हुन्। $a \equiv b \pmod{m}$ भए धनात्मक पूर्णसंख्या n को निम्ति प्रमाण गर: $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ । यो कथनको उल्टा सही हुन्छ होला। विस्तार गर।

(d) Determine the conditions for which the following system of equations has

সেই শর্তগুলি নির্ণয় কর যাহার জন্য নিম্নের সমীকরণ সমূহের

(i) unique solution,

একটি নির্দিষ্ট সমাধান থাকবে

(ii) no solution and

কোন সমাধান থাকবে না এবং

(iii) many solutions.

অনেকগুলি সমাধান থাকবে।

$$x+4y+2z=1$$
$$2x+7y+5z=2b$$
$$4x+9y+10z=2b+1$$

समीकरण समूह

$$x+4y+2z=1$$
$$2x+7y+5z=2b$$
$$4x+9y+10z=2b+1 \text{ को}$$

कुन शर्तहरूको प्रभावमा

(i) एकमात्र समाधान हुन्छ

(ii) समाधान नै हुँदैन

(iii) एकभन्दा बढ़ी समाधान हुन्छ।

(e) (i) Prove that $\sqrt{i}+\sqrt{-i}=\sqrt{2}$. 4

প্রমাণ কর $\sqrt{i}+\sqrt{-i}=\sqrt{2}$ ।

प्रमाण गर: $\sqrt{i}+\sqrt{-i}=\sqrt{2}$

(ii) Define a partial order relation and give an example of it. 2

আংশিক ক্রম সম্পর্কের সংজ্ঞা এবং একটি উদাহরণ দাও।

आंशिक क्रम सम्बन्ध (partial order relation) को परिभाषा साथै उदाहरण देऊ।

(f) (i) If a, b, c are positive real numbers, not all equal, then prove that 4

যদি a, b, c তিনটি ধনাত্মক বাস্তব রাশি হয় যাহারা সবাই সমান নহে, তাহলে প্রমাণ কর

a, b, c विभिन्न धनात्मक वास्तविक संख्याहरू भए प्रमाण गर :

$$(a+b+c)(bc+ca+ab)>9abc$$

(ii) State the Cauchy-Schwartz inequality. 2

'Cauchy-Schwartz' অসমীকরণটি বিবৃত কর।

Cauchy-Schwartz inequality उल्लेख गर।

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

3. Answer any *two* questions: 12×2 = 24

যে-কোন ***দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***दुईवटा*** प्रश्नका उत्तर देऊ :

(a) (i) Find the eigenvalues and eigenvectors of the matrix: 6

নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির আইগেন মান এবং আইগেন ভেক্টরগুলি বাহির করঃ

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

मेट्रिक्स $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ को eigen मानहरू अनि eigen सदिशहरू निर्णय गर।

(ii) If $u+iv=\tan(x+iy)$, then show that $u^2+v^2+2u\cot 2x=1$. 6

যদি $u+iv=\tan(x+iy)$ হয়, তাহলে দেখাও যে $u^2+v^2+2u\cot 2x=1$.

$u+iv=\tan(x+iy)$ भए, प्रमाण गर: $u^2+v^2+2u\cot 2x=1$.

(b) (i) Find the rank of the matrix: 4

নিম্নলিখিত ম্যাট্রিক্সটির মাত্রা নির্ণয় করঃ

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ को rank निर्णय गर।

(ii) Let $f:A\to B$ and $g:B\to C$ be two mapping. If $g\circ f$ is bijective then prove that f is injective and g is surjective. 6

ধর $f:A\to B$ এবং $g:B\to C$ দুইটি অপেক্ষক। প্রমাণ কর যে যদি $g\circ f$ বাইজেক্টিভ হয় তাহলে f ইনজেক্টিভ হবে এবং g সারজেক্টিভ হবে।

$f:A\to B$ अनि $g:B\to C$ दुईवटा map हरू हुन्। यदि $g\circ f$ bijective भए f injective तथा g surjective हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(iii) Give an example of a surjective mapping which is not injective.

একটি সার্জেক্টিভ অপেক্ষকের উদাহরণ দাও যাহা ইনজেক্টিভ নহে।

Surjective हुने तर injective नहुने एउटा map को उदाहरण देऊ।

(c) (i) Prove by induction that 64 divides 9^n-8n-1 for all non-negative integers n.

আরোহন পদ্ধতি ব্যবহার করে প্রমাণ কর 9^n-8n-1 রাশিটি যেকোন অশূন্য পূর্ণসংখ্যা n-এর জন্যে 64 দ্বারা বিভাজ্য।

सबै गैर नकारात्मक (non-negative) पूर्णसंख्या n को निम्ति 64 ले 9^n-8n-1 लाई भाग गर्छ भनी प्रमाण गर।

(ii) Find the $\gcd(360,125)$ and express it in the form $360s+125t$, where s and t are integers.

গ.সা.গু. $(360,125)$ নির্ণয় কর এবং ইহাকে $360s+125t$ আকারে প্রকাশ কর, যেখানে s এবং t হল দুটি পূর্ণসংখ্যা।

$\gcd(360,125)$ को मान निर्णय गर। s अनि t पूर्णसंख्याहरू निर्णय गर जहाँ $\gcd(360,125) = 360s+125t$ हुन्छ।

(d) (i) Let $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&5&7&4&6\end{pmatrix}$ and $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&3&7&6&4&1\end{pmatrix}$

be two elements of S_7. Examine whether β and α^{-1} are even permutations.

ধর $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&5&7&4&6\end{pmatrix}$ এবং $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&3&7&6&4&1\end{pmatrix}$

S_7-এর দুইটি সদস্য। β এবং α^{-1} দুইটি যুগ্ম বিন্যাস কিনা পরীক্ষা কর।

S_7 का दुईवटा तत्वहरू $\alpha=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&1&2&5&7&4&6\end{pmatrix}$ अनि $\beta=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&5&3&7&6&4&1\end{pmatrix}$ भए β अनि α^{-1} जोड़ी permutation हुन्छ कि हुँदैन जाँच गर।

(ii) Find the inverse of the following matrix using elementary row operations.

মৌলিক সারি ক্রিয়া ব্যবহার করে A^{-1} নির্ণয় কর, যেখানে,

$$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}$$

प्राथमिक पङ्क्ति सञ्चालनको सहायताले $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\3&1&1\end{pmatrix}$ को inverse निर्णय गर।

——×——