'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 3rd Semester Examination, 2023

DSC1/2/3-P3-MATHEMATICS

REAL ANALYSIS

(OLD SYLLABUS 2018)

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

Answer any ***four*** questions: 3×4 = 12

যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***चार*** प्रश्नका उत्तर देऊ।

(a) Prove that $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 3

প্রমাণ কর যে $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$।

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(b) Find limsup and liminf of $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. 3

$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$-ক্রমটির limsup এবং liminf বের কর।

$\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ को limsup र liminf निकाल।

(c) Show that every convergent sequence is bounded. Give an example to show that converse of the above result is not always true. 3

দেখাও যে প্রত্যেকটি অভিসারী ক্রম সীমাবদ্ধ। একটি উদাহরণ সহযোগে দেখাও যে সীমাবদ্ধ ক্রম অভিসারী নাও হতে পারে।

प्रत्येक अभिकेन्द्रित अनुक्रम बाँधिएको (bounded) छ भनी प्रमाण गर। माथिको परिणयको उल्टो सँधै सत्य हुदैन भनी एउटा उदाहरण दिएर प्रमाण गर।

(d) Test the convergence of the series $\frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.4^2} + \cdots\cdots$. 3

নিচের শ্রেণীটির অভিসারীতা বিচার কর

$$\frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.4^2} + \cdots\cdots$$

श्रेणिक्रम $\frac{1}{1.2^2} + \frac{1}{2.3^2} + \frac{1}{3.4^2} + \cdots\cdots$ को अभिकेन्द्रनको जाँच गर।

Maynaguri College Library

(e) Prove that a finite set is always closed.

প্রমাণ কর যে একটি সসীম সেট সবসময় বদ্ধ।

एउटा सिमित सेट सँधै closed हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(f) Show that the set $S = \{-1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ is not a closed set.

দেখাও যে $S = \{-1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ সেটটি বদ্ধ নয়।

सेट $S = \{-1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ एउटा closed सेट होइन भनी प्रमाण गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

2. Answer any ***four*** questions: 6×4 =

যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै ***चार*** प्रश्नका उत्तर देऊ :

(a) (i) Find the set of all limit points of the set $S = \left\{\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

$S = \left\{\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$ সেটটির সমস্ত limit point গুলো বের কর।

सेट $S = \left\{\frac{1}{2m}+\frac{1}{3n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$ को सबै limit बिन्दुहरूको सेट निर्णय गर।

(ii) Show that the set $\{x : 1 < x < 2\}$ is an open set.

দেখাও যে $\{x : 1 < x < 2\}$ সেটটি একটি open set.

सेट $\{x : 1 < x < 2\}$ एउटा open सेट हो भनी प्रमाण गर।

(b) (i) Use comparison test to prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ is convergent.

Comparison test ব্যবহার করে দেখাও যে $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ শ্রেণীটি অভিসারী।

श्रेणीक्रम $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ अभिकेन्द्रित छ भनी comparison परीक्षण द्वारा प्रमाण गर।

(ii) Investigate the convergence or divergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$, where $\alpha > 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$, $\alpha > 0$ শ্রেণীটির অভিসারীতা বা অপসারীতা পরীক্ষা কর।

श्रेणीक्रम $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$, $\alpha > 0$ को अभिकेन्द्र र divergence जाँच गर।

(c) Prove that the sequence $\{u_n\}$ defined by $u_1 = \sqrt{7}$ and $u_{n+1} = \sqrt{7+u_n}$ for all $n \geq 1$ converges to the positive root of the equations $x^2 - x - 7 = 0$.

প্রমাণ কর যে $\{u_n\}$ ক্রমটি $x^2 - x - 7 = 0$ সমীকরণের ধনাত্মক বীজে অভিসারী, যেখানে $u_1 = \sqrt{7}$ এবং $u_{n+1} = \sqrt{7+u_n}$, $n \geq 1$.

Maynaguri College Library

$u_1 = \sqrt{7}$ र $u_{n+1} = \sqrt{7+u_n}$ $\forall$ $n \geq 1$ ले परिभाषित अनुक्रम $\{u_n\}$ समीकरण $x^2 - x - 7 = 0$ को मूलमा अभिकेन्द्रित गर्छ भनी प्रमाण गर।

(d) Show that every bonded infinite subset of ℝ has at least one limit point in ℝ. 6

দেখাও যে ℝ-এর প্রত্যেকটি অসীম ও বদ্ধ উপসেটের কমপক্ষে একটি limit point ℝ-এ আছে।

ℝ को सबै bonded अनन्त उपसेट को कम से कम ℝ मा एउटा limit बिन्दु छ भनी प्रमाण गर।

(e) State and prove Leibnitz's test for alternating series. 6

Alternating শ্রেণীর জন্য Leibnitz's test বিবৃতিসহ প্রমাণ কর।

वैकल्पिक श्रेणीक्रमको लागी Leibnitz को परीक्षण उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(f) State and prove nested interval theorem. 6

বিবৃতিসহ nested interval theorem প্রমাণ কর।

नेस्टेड अन्तरल उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions: $12 \times 2 = 24$

যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै **दुई** प्रश्नका उत्तर देऊ।

(a) (i) Prove that arbitrary intersection of closed sets is closed. Examine whether infinite union of closed sets is closed or not. 6+4+2

প্রমাণ কর যে বদ্ধ সেট সমূহের যদৃচ্ছ ছেদ বদ্ধ সেট হয়। এছাড়াও অসংখ্য বদ্ধ সেট সমূহের যদৃচ্ছ সংযোগ বদ্ধ সেট হবে কিনা পরীক্ষা কর।

Closed सेटहरूको स्वेच्छ प्रतिच्छेदन् closed हो भनी प्रमाण गर। Closed सेटहरूको असिमित संघ closed हो वा होइन जाँच गर।

(ii) Suppose E be a closed and F be a compact subsets of ℝ. Prove that $E \cap F$ is compact.

ধর, E এবং F, ℝ সেটের উপসেট যেখানে E হল closed এবং F হল compact সেট। প্রমাণ কর যে, $E \cap F$ compact সেট।

आफ्नौ ℝ को E एउटा closed र F एउटा compact उपसेट हो। $E \cap F$ compact हो भनी प्रमाण गर।

(iii) Give an example of an infinite set in ℝ which is neither an open set nor a closed set.

ℝ-এর একটি অসীম সেট-এর উদাহরণ দাও যেটি মুক্ত সেটও (open set) নয় বদ্ধ সেটও নয়।

ℝ मा भएको एउटा असिमित सेटको उदाहरण देऊ जो ना open ना closed सेट हो।

(b) (i) State and prove Bolzano-Weierstrass Theorem. 6+3+3

বিবৃতিসহ Bolzano-Weierstrass Theorem প্রমাণ কর।

Bolzano-Weierstrass उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

(ii) Show that $\lim_{n \to \infty} x_n = 3$, where $x_n = \dfrac{3n}{n + 5\sqrt{n}}$.

দেখাও যে, $\lim_{n \to \infty} x_n = 3$, যেখানে $x_n = \dfrac{3n}{n + 5\sqrt{n}}$.

$x_n = \dfrac{3n}{n + 5\sqrt{n}}$ छ। प्रमाण गर $\lim_{n \to \infty} x_n = 3$.

Maynaguri College Library

(iii) Test the convergence of the series $\sum x_n$, where $x_n = \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}$.

$\sum x_n$ শ্রেণীটির অভিসারীতা যাচাই কর, যেখানে $x_n = \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}$ ।

श्रेणीक्रम $\sum x_n$ जहाँ $x_n = \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1}$ को अभिकेन्द्रन जाँच गर।

(c) (i) Prove that a Cauchy sequence of real numbers is convergent. 6+2+4

প্রমাণ কর যে একটি বাস্তব সংখ্যার Cauchy ক্রম অভিসারী হয়।

वास्तविक संख्याहरूको Cauchy अनुक्रम अभिकेन्द्रित छ भनी प्रमाण गर।

(ii) Prove that $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ is a Cauchy sequence.

প্রমাণ কর যে, $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ক্রমটি Cauchy ।

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ एउटा Cauchy अनुक्रम हो भनी प्रमाण गर।

(iii) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ is convergent.

দেখাও যে $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ শ্রেণীটি অভিসারী।

श्रेणीक्रम $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ अभिकेन्द्रित छ भनी प्रमाण गर।

(d) (i) For a positive integer m, show that the two series $u_1+u_2+u_3+\cdots$ and $u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$ converge or diverge together. 4+2+6

যেকোন একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m হলে দেখাও যে দুটি শ্রেণী $u_1+u_2+u_3+\cdots$ এবং $u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$ একইসঙ্গে অভিসারী বা অপসারী হবে।

एउटा धनात्मक पूर्णांक m को लागी दुईवटा श्रेणीक्रम $u_1+u_2+u_3+\cdots$ र $u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots$ एकै साथमा converge अथवा diverge गर्छ भनी प्रमाण गर।

(ii) Prove that the series $\sum\frac{n}{n+1}$ is divergent.

দেখাও যে $\sum\frac{n}{n+1}$ শ্রেণীটি অপসারী।

श्रेणीक्रम $\sum\frac{n}{n+1}$ divergent हो भनी प्रमाण गर।

(iii) Examine the convergence of the series $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$, $x>0$.

নিম্নের শ্রেণীটির অভিসারীতা পরীক্ষা করঃ

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots \quad , \quad x>0$$

श्रेणीक्रम $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$, $x>0$ को अभिकेन्द्रन को जाँच गर।

——×——

Maynaguri College Library