



‘সমানো মন্ত্র সমিতি: সমানী’

**UNIVERSITY OF NORTH BENGAL**  
B.Sc. Programme 4th Semester Examination, 2023

**DSC1/2/3-P4-MATHEMATICS**

**DIFFERENTIAL EQUATION AND VECTOR CALCULUS**  
**(REVISED SYLLABUS 2023)**

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.  
Symbols have their usual meaning.*

**GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক**

1. Answer any **four** questions from the following: **3×4 = 12**

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উত্তর দাও:

কুন্ত চার প্রশ্নগুলো উত্তর লেখ:

- (a) What do you mean by degree and order of an ordinary differential equation? Find the degree and order of the D. E. **3**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[ 1 - \left( \frac{dy}{dx} \right)^4 \right]^{1/3}$$

কোনো একটি সাধারণ অবকল সমীকরণের ক্রম (order) এবং ঘাত (degree) বলতে কি বোঝা ?

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[ 1 - \left( \frac{dy}{dx} \right)^4 \right]^{1/3} \text{ অবকল সমীকরণটির ক্রম এবং ঘাত নির্ণয় কর।}$$

সাধারণ বিভেদক সমিকরণকা ডিগ্রী র ক্রম ভন্নালো কে বুঝিন্ত ?

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[ 1 - \left( \frac{dy}{dx} \right)^4 \right]^{1/3} \text{ কো ডিগ্রী র ক্রম নির্ণয় গর।}$$

- (b) Show that the function  $f(x, y) = xy^2$  does not satisfy the Lipschitz condition on the strip  $|x| \leq 1, |y| < \infty$ . **3**

দেখাও যে  $f(x, y) = xy^2$  অপেক্ষকটি  $|x| \leq 1$  এবং  $|y| < \infty$  অঞ্চলে Lipschitz-এর শর্তিকে সিদ্ধ করে না।

পট্টী  $|x| \leq 1, |y| < \infty$  মা function  $f(x, y) = xy^2$  লে Lipschitz শর্ত সন্তুষ্ট গর্দেন ভনী প্রমাণ গর।

- (c) Show that the point at infinity is a regular singular point of the equation **3**

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + 3y = 0$$

देखाओ ये  $x^2 y'' + (3x - 1)y' + 3y = 0$  समीकरणिति असीम बिन्दुते एकटि regular singular बिन्दु आছे।

अनन्तमा भएको बिन्दु समिकरण  $x^2 y'' + (3x - 1)y' + 3y = 0$  को नियमित सिंगुलर बिन्दु हो भनी प्रमाण गर।

- (d) If  $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$  then find  $\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$ . 3

यदि  $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$  हय तबे  $\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$ -एर मान निर्णय कर।

यदि  $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$  भए  $\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$  निर्णय गर।

- (e) If the vectors  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  are irrotational, then show that  $\vec{a} \times \vec{b}$  is solenoidal. 3

यदि  $\vec{a}$  एवं  $\vec{b}$  भेट्टैरद्वय irrotational हय तबे देखाओ ये  $\vec{a} \times \vec{b}$  एकटि solenoidal हरे।

यदि भ्याक्टर  $\vec{a}$  र  $\vec{b}$  irrotational भए  $\vec{a} \times \vec{b}$  solenoidal हुन्छ भनी प्रमाण गर।

- (f) In what direction from the point  $(1, 1, -1)$  the directional derivative of  $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$  is maximum? 3

$(1, 1, -1)$  बिन्दु थेके कोन् दिक बराबर  $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$  -एर directional derivative सर्वोच्च हरे?

बिन्दु  $(1, 1, -1)$  बाट कुन दीशामा  $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$  को दिशात्मक derivative अधिकतम हुन्छ?

### GROUP-B / विभाग-ख / समूह-ख

Answer any four questions from the following

$6 \times 4 = 24$

ये-कोन चारटि प्रश्नेर उत्तर दाओ

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख

2. (a) If  $y_1$  and  $y_2$  are two linearly independent solutions of the linear differential equation  $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ , then show that the Wronskian is  $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p dx}$ , where  $A$  is a constant. 3

यदि  $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$  रैखिक अवकल समीकरणेर  $y_1$  एवं  $y_2$  दुष्टि रैखिकभाबे स्वतन्त्र (linearly independent) समाधान हय तबे देखाओ ये Wronskian टि  $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p dx}$  हरे, येथाने  $A$  एकटि क्रमक।

यदि  $y_1$  र  $y_2$  विभेदक समिकरण  $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$  का रेखीय स्वतन्त्र समाधानहरू भए।

Wronskian  $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p dx}$  हुन्छ भनी प्रमाण गर।  $A$  एउटा स्थिर मान हो।

- (b) Find the particular integral of the equation  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$ . 3

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$  সমীকরণটির particular integral টি নির্ণয় কর।

সমিকরণ  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$  का particular integral निर्णय गर।

3. Solve the equation  $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = x^2$  by using the method of undetermined co-efficients.

Undetermined co-efficients পদ্ধতি ব্যবহার করে  $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = x^2$  সমীকরণকে সমাধান কর।

Undetermined co-efficient কो পদ্ধতি প্রযোগ গরের সমিকরণ  $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = x^2$  লাঈ সমাধান গর।

4. Solve by the method of variation of parameters

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2 e^x}.$$

Variation of parameters পদ্ধতির সাহায্যে  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2 e^x}$  সমীকরণকে সমাধান কর।

Variation of parameter কो পদ্ধতি প্রযোগ গরের সমিকরণ  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2 e^x}$  লাঈ সমাধান গর।

5. Solve the following simultaneous linear equations:

নিম্নলিখিত বৈচিক সমীকরণগুলিকে সমাধান করঃ

তল দিএকো সমিকরণ প্রণালীলাঈ সমাধান গর:

$$\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} - x + 3y = e^{2t}.$$

6. (a) Examine whether the vector valued function  $\vec{r} = t^3 \hat{i} + e^t \hat{j} + \frac{1}{t+3} \hat{k}$  is continuous at  $t = -3$  or not. 3

$\vec{r} = t^3 \hat{i} + e^t \hat{j} + \frac{1}{t+3} \hat{k}$  ভেক্টর মান বিশিষ্ট অপেক্ষকটি  $t = -3$  তে সন্তত কিনা পরীক্ষা কর।

ভেক্টর মান function  $\vec{r} = t^3 \hat{i} + e^t \hat{j} + \frac{1}{t+3} \hat{k}$   $t = -3$  মা নিরন্তর হুন্ত যা হুঁদৈন জাঁচ গর্নুহোস্ব।

- (b) Find the work done in traversing around a unit circle in the  $xy$ -plane counterclockwise against a force field

3

$$\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \hat{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \hat{j}.$$

$xy$  -সমতলে একটি একক বৃক্ষপথের চারপাশে ঘড়ির কাটার বিপরীতমুখি

$$\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \hat{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \hat{j}$$

বলক্ষেত্রে কৃতকার্যটি নির্ণয় কর।

$xy$  -সতहমা ভেক্টর ইকাঈ বৃত্তকো বরিপরি ঘড়িকো বিপরীত দিশামা অনি বল ক্ষেত্র  $\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \hat{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \hat{j}$  কো বিপরীত পার গর্দা গরিসে কাম নির্ণয় গর।

7. (a) Show that  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{O}$ .

2

দেখাও যে  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{O}$ .

প্রমাণ গর:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{O}$ ।

- (b) Prove that for any four vectors  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ,

2+2

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= [\vec{a} \vec{b} \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] \vec{d} \\ &= [\vec{a} \vec{c} \vec{d}] \vec{b} - [\vec{b} \vec{c} \vec{d}] \vec{a} \end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  চারটি ভেক্টরের জন্য প্রমাণ করঃ

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= [\vec{a} \vec{b} \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] \vec{d} \\ &= [\vec{a} \vec{c} \vec{d}] \vec{b} - [\vec{b} \vec{c} \vec{d}] \vec{a} \end{aligned}$$

প্রমাণ গর: কুনৈ চার ভ্যাক্টর  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  কো লাগী

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= [\vec{a} \vec{b} \vec{d}] \vec{c} - [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] \vec{d} \\ &= [\vec{a} \vec{c} \vec{d}] \vec{b} - [\vec{b} \vec{c} \vec{d}] \vec{a} \end{aligned}$$

### GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

Answer any two questions from the following

12×2 = 24

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উভয় দাও

কুনৈ দুই প্রশ্নহীনকো উত্তর লেখ

8. (a) If  $\vec{F} = \phi \vec{\nabla} \phi$ , then show that  $\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$ .

4

যদি  $\vec{F} = \phi \vec{\nabla} \phi$  তাহলে দেখাও যে  $\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$ ।

যদি  $\vec{F} = \phi \vec{\nabla} \phi$  ভেক্টর প্রমাণ গর  $\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$ ।

- (b) Prove that  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , for any vector function  $\vec{A}$ .

প্রমাণ কর  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , যেকোন ভেস্টের অপেক্ষক  $\vec{A}$ -এর জন্য।

প্রমাণ গর:  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , কৃত্তীয় vector function  $\vec{A}$  কো লাগী।

- (c) Evaluate the line integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  along the curve  $C: x^2 + y^2 = 1, z = 2$  in the positive direction from  $A(1, 0, 2)$  to  $B(0, 1, 2)$  where  $\vec{F} = (y + xz^2)\hat{i} + (2z - y)\hat{j} + (xy^2 - z)\hat{k}$ .

$C: x^2 + y^2 = 1, z = 2$  বক্ররেখা বরাবর  $A(1, 0, 2)$  থেকে  $B(0, 1, 2)$  পর্যন্ত ধনাত্মক দিকে (positive direction)

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

line integral টি নির্ণয় কর, যেখানে  $\vec{F} = (y + xz^2)\hat{i} + (2z - y)\hat{j} + (xy^2 - z)\hat{k}$

রেখা integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  বক্র  $C: x^2 + y^2 = 1, z = 2$ , কো positive দিশা  $A(1, 0, 2)$  দেখী  $B(0, 1, 2)$  মা মূল্যাংকন গর।  $\vec{F} = (y + xz^2)\hat{i} + (2z - y)\hat{j} + (xy^2 - z)\hat{k}$

9. (a) If  $\vec{r}(t) = 7t^2\hat{i} + t^3\hat{j} - (t-1)\hat{k}$  then find  $\int_1^2 \left( \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$ .

যদি  $\vec{r}(t) = 7t^2\hat{i} + t^3\hat{j} - (t-1)\hat{k}$  হয় তবে  $\int_1^2 \left( \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$ -এর মান নির্ণয় কর।

যদি  $\vec{r}(t) = 7t^2\hat{i} + t^3\hat{j} - (t-1)\hat{k}$  ভে  $\int_1^2 \left( \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$  নির্ণয় গর।

- (b) Find the volume of the tetrahedron where position vectors of its vertices are  $\hat{j} + 2\hat{k}$ ,  $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  and  $4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ .

$\hat{j} + 2\hat{k}$ ,  $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  এবং  $4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$  অবস্থান ভেস্টের বিশিষ্ট শীর্ষবিন্দু দ্বারা গঠিত tetrahedron-এর আয়তন নির্ণয় কর।

চতুর্পার্শীয়কা শীর্ষহরুকা স্থিতি ভ্যাকটরহরু  $\hat{j} + 2\hat{k}$ ,  $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ,  $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  র  $4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$  ভে ত্যসকা আয়তন নির্ণয় গর।

- (c) Show that  $e^{5x}$  and  $e^{3x}$  are linearly independent solutions of  $y'' - 8y' + 15y = 0$ . Find the solution  $y(x)$  with the condition  $y(0) = 0$  and  $y'(0) = 1$ .

দেখাও যে  $e^{5x}$  এবং  $e^{3x}$  দুটি  $y'' - 8y' + 15y = 0$  সমীকরণের রেখিকভাবে স্বাধীন সমাধান।

$y(0) = 0$  এবং  $y'(0) = 1$  শর্তে  $y(x)$  সমাধানকে নির্ণয় কর।

$e^{5x}$  র  $e^{3x}$   $y'' - 8y' + 15y = 0$  কা রেখীয় স্বতন্ত্র সমাধান হো ভনী প্রমাণ গর। যদি  $y(0) = 0$  র  $y'(0) = 1$  ভে সমাধান  $y(x)$  নির্ণয় গর।

10.(a) Define phase portrait.

Phase portrait के संज्ञायित कर।

Phase portrait का परिभाषा लेख।

(b) Solve the linear autonomous system

6+3+2

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = 4x - 2y$$

subject to the initial condition  $(x_0, y_0) = (2, -3)$ . Determine the nature of the critical point of the system and draw the phase portrait for the system.

$(x_0, y_0) = (2, -3)$  प्रारम्भिक शर्त हले  $\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = 4x - 2y$  linear autonomous system के समाधान कर।

उक्त system त्रिमात्रीय विन्दुशुलिर प्रकृति निर्णय कर एवं system-एर phase portrait ट्रिअक्षन कर।

रेखीय स्वायत्त प्रणाली समाधान गर:

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = 4x - 2y$$

प्रारम्भिक शर्त  $(x_0, y_0) = (2, -3)$  को अधीनमा प्रणालीको critical बिन्दुहरूको प्रकृती खोज गर अनि प्रणालीको phase portrait अंकित गर।

11.(a) Examine whether the differential equation  $(y^2 e^x + 2xy)dx - x^2 dy = 0$  is exact.

2

$(y^2 e^x + 2xy)dx - x^2 dy = 0$  अबकल समीकरणटि exact किना परीक्षा कर।

विभेदक समिकरण  $(y^2 e^x + 2xy)dx - x^2 dy = 0$  exact हो अथवा होइन जाँच गर।

(b) Show that the vector field  $\vec{F} = (x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$  is irrotational.

3

देखाओ ये भेस्ट्रेक्षेत्र  $\vec{F} = (x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$  ट्रिअक्षन भेस्ट्रेक्षेत्र अर्थात् irrotational.

भेक्टर क्षेत्र  $\vec{F} = (x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$  irrotational हो भनी प्रमाण गर।

(c) Show that the vector field  $\vec{A} = (y^2 + z^3)\hat{i} + (2xy - 5z)\hat{j} + (3xz^2 - 5y)\hat{k}$  is conservative and find the scalar function for the field.

3+4

देखाओ ये  $\vec{A} = (y^2 + z^3)\hat{i} + (2xy - 5z)\hat{j} + (3xz^2 - 5y)\hat{k}$  भेस्ट्रेक्षेत्र अपेक्षकटि संरक्षित (conservative) एवं उक्त क्षेत्रेर scalar अपेक्षकटि निर्णय कर।

भेक्टर क्षेत्र  $\vec{A} = (y^2 + z^3)\hat{i} + (2xy - 5z)\hat{j} + (3xz^2 - 5y)\hat{k}$  conservative हो भनी प्रमाण गर अनि त्यस क्षेत्रको लागी scalar function निर्णय गर।

—x—



‘সমানো মন্ত্র: সমিতি: সমানী’

**UNIVERSITY OF NORTH BENGAL**

B.Sc. Programme 4th Semester Examination, 2023

### DSC1/2/3-P4-MATHEMATICS

#### DIFFERENTIAL EQUATION AND VECTOR CALCULUS

(OLD SYLLABUS 2018)

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

*The figures in the margin indicate full marks.*

#### GROUP-A / বিভাগ-ক / সমূহ-ক

- I. Answer any **four** questions from the following:  $3 \times 4 = 12$

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উভয় দাও:

কুন্তে চার প্রশ্নগুলির উত্তর লেখো:

(a) Find  $\frac{1}{D^2 - 7D + 10} \{2e^{5x} + 7e^{10} + x\}$ .

$\frac{1}{D^2 - 7D + 10} \{2e^{5x} + 7e^{10} + x\}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$\frac{1}{D^2 - 7D + 10} \{2e^{5x} + 7e^{10} + x\}$  নির্ণয় গর।

- (b) Show that the function  $f(x, y) = xy^2$  does not satisfy the Lipschitz condition on the strip  $|x| \leq 1, |y| < \infty$ .

দেখাও যে  $f(x, y) = xy^2$  অপেক্ষকটি  $|x| \leq 1$  এবং  $|y| < \infty$  অঞ্চলে Lipschitz-এর শর্তটিকে সিদ্ধ করে না।

পদ্ধতি  $|x| \leq 1, |y| < \infty$  মা function  $f(x, y) = xy^2$  লে Lipschitz শর্ত সন্তুষ্ট গর্দেন ভনি প্রমাণ গর।

- (c) Show that the point at infinity is a regular singular point of the equation

$$x^2 y'' + (3x-1)y' + 3y = 0$$

দেখাও যে  $x^2 y'' + (3x-1)y' + 3y = 0$  সমীকরণটির অসীম বিন্দুতে একটি regular singular বিন্দু আছে।

অনন্তমা ভাবে বিন্দু সমিকরণ  $x^2 y'' + (3x-1)y' + 3y = 0$  কो নিয়মিত সিংগুলর বিন্দু হো ভনি প্রমাণ গর।

(d) If  $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$  then find  $\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$ .

যদি  $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$  হয়  $\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$ -এর মান নির্ণয় কর।

যদি  $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$  ভে  $\left[ \frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} \right]$  নির্ণয় গর।

(e) If the vectors  $\vec{a}$  and  $\vec{b}$  are irrotational, then show that  $\vec{a} \times \vec{b}$  is solenoidal.

যদি  $\vec{a}$  এবং  $\vec{b}$  ভেক্টর অবকল হয় তবে দেখাও যে  $\vec{a} \times \vec{b}$  একটি solenoidal হবে।

যদি ভেক্টর  $\vec{a}$  র  $\vec{b}$  irrotational ভে  $\vec{a} \times \vec{b}$  solenoidal হুন্ত ভনী প্রমাণ গর।

(f) In what direction from the point  $(1, 1, -1)$  the directional derivative of  $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$  is maximum?

$(1, 1, -1)$  বিন্দু থেকে কোন দিক বরাবর  $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$  -এর directional derivative সর্বোচ্চ হবে ?

বিন্দু  $(1, 1, -1)$  বাট কুন দীশামা  $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$  কো দিশাত্মক derivative অধিকতম হুন্ত ?

### GROUP-B / বিভাগ-খ / সমূহ-খ

Answer any four questions from the following

$6 \times 4 = 24$

যে-কোন চারটি প্রশ্নের উভয় দাও

কুনে চার প্রশ্নহৰুকো উত্তর লেখ

2. (a) If  $y_1$  and  $y_2$  are two linearly independent solutions of the linear differential equation

$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$ , then show that the Wronskian is  $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p dx}$ , where  $A$  is a constant.

যদি  $\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$  রেখিক অবকল সমীকরণের  $y_1$  এবং  $y_2$  দুটি রেখিকভাবে স্বতন্ত্র (linearly independent) সমাধান হয় তবে দেখাও যে Wronskian টি হবে  $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p dx}$ । যেখানে  $A$  হল ধ্রুবক।

যদি  $y_1$  র  $y_2$  বিভেদক সমিকরণ  $\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$  কা রেখীয় স্বতন্ত্র সমাধানহৰু ভে।

Wronskian  $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p dx}$  হুন্ত ভনী প্রমাণ গর।  $A$  এটা স্থির মান হো।

(b) Find the particular integral of the equation  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$ .

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$  সমীকরণটির particular integral টি নির্ণয় কর।

সমিকরণ  $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$  কা particular integral নির্ণয় গর।

3. Solve the equation  $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = x^2$  by using the method of undetermined co-efficients.

6

Undetermined co-efficient पद्धति ब्यबहार करे  $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = x^2$  के समाधान कर।

Undetermined co-efficient को पद्धति प्रयोग गरेर समिकरण  $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = x^2$  लाई समाधान गर।

4. Solve by the method of variation of parameters

6

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2 e^x}.$$

Variation of parameter पद्धतिर साहाय्ये समाधान करः  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2 e^x}$  ।

Variation of parameter को पद्धतिलाई प्रयोग गरेर समिकरण  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x^2 e^x}$  लाई समाधान गर।

5. Solve the following simultaneous linear equations:

6

निम्नलिखित रैखिक समीकरणशुल्के समाधान करः

तल दिइएको समिकरण प्रणालीलाई समाधान गरः

$$\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$$

$$\frac{dy}{dt} - x + 3y = e^{2t}.$$

6. (a) Examine whether the vector valued function  $\vec{r} = t^3 \hat{i} + e^t \hat{j} + \frac{1}{t+3} \hat{k}$  is continuous

3

at  $t = -3$  or not.

$\vec{r} = t^3 \hat{i} + e^t \hat{j} + \frac{1}{t+3} \hat{k}$  भेट्टरमान विशिष्ट अपेक्षकटि  $t = -3$  ते सन्तत किना परीक्षा कर।

भेक्टर मान function  $\vec{r} = t^3 \hat{i} + e^t \hat{j} + \frac{1}{t+3} \hat{k}$   $t = -3$  मा निरन्तर (continuous) हुन्छ या हुँदैन जाँच गर्नुहोस्।

- (b) Find the work done in traversing around a unit circle in the  $xy$ -plane counterclockwise against a force field

3

$$\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \hat{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \hat{j}.$$

*xy*-সমতলে একটি একক বৃত্তপথের চারপাশে ঘড়ির কাটার বিপরীতমুখী

$$\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \hat{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \hat{j}$$

বলক্ষেত্রে কৃতকার্যটি নির্ণয় কর।

*xy*-সতहমা ভেক্সা ইকাঈ বৃত্তকো বরিপরি ঘড়িকো বিপরীত দিশামা অনি বল ক্ষেত্র

$$\vec{F} = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) \hat{i} + \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \hat{j} \text{ কো বিপরীত পার গর্দা গরিনে কাম নির্ণয় গর।}$$

7. (a) Show that  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{O}$ .

দেখাও যে  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{O}$ .

প্রমাণ গর:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{O}$

- (b) Prove that for any four vectors  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ,

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}] \vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] \vec{d} \\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}] \vec{b} - [\vec{b}\vec{c}\vec{d}] \vec{a} \end{aligned}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  চারটি ভেক্টরের জন্য প্রমাণ করঃ

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}] \vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] \vec{d} \\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}] \vec{b} - [\vec{b}\vec{c}\vec{d}] \vec{a} \end{aligned}$$

প্রমাণ গর: কুনৈ চার ভ্যাক্টর  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  কো লাগী

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}] \vec{c} - [\vec{a}\vec{b}\vec{c}] \vec{d} \\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}] \vec{b} - [\vec{b}\vec{c}\vec{d}] \vec{a} \end{aligned}$$

### GROUP-C / বিভাগ-গ / সমূহ-গ

Answer any two questions from the following

$12 \times 2 = 24$

যে-কোন দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও

কুনৈ দুই প্রশ্নের উত্তর লেখ

8. (a) If  $\vec{F} = \phi \vec{\nabla} \phi$ , then show that  $\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$ .

যদি  $\vec{F} = \phi \vec{\nabla} \phi$  তাহলে দেখাও যে  $\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$

যদি  $\vec{F} = \phi \vec{\nabla} \phi$  ভেক্সা প্রমাণ গর  $\vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$

- (b) Prove that  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , for any vector function  $\vec{A}$ .

প্রমাণ কর  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , যেকোন ভেক্টর অপেক্ষক  $\vec{A}$ -এর জন্য।

প্রমাণ গর:  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ , কুনৈ vector function  $\vec{A}$  কো লাগী।

- (c) Evaluate the line integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  along the curve  $C: x^2 + y^2 = 1, z = 2$  in the positive direction from  $A(1, 0, 2)$  to  $B(0, 1, 2)$  where  $\vec{F} = (y + xz^2)\hat{i} + (2z - y)\hat{j} + (xy^2 - z)\hat{k}$ .

$C: x^2 + y^2 = 1, z = 2$  ৰক্ষণাবলী বৰাবৰ  $A(1, 0, 2)$  থেকে  $B(0, 1, 2)$  পৰ্যন্ত ধনাত্মক দিকে (positive direction)

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

line integral টি নির্ণয় কৰ, যেখানে  $\vec{F} = (y + xz^2)\hat{i} + (2z - y)\hat{j} + (xy^2 - z)\hat{k}$ .

ৱেক্টর integral  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  কৰ  $C: x^2 + y^2 = 1, z = 2$ , কো positive দিশা  $A(1, 0, 2)$  দেখৰী  $B(0, 1, 2)$  মা মূল্যাংকন গৰ।  $\vec{F} = (y + xz^2)\hat{i} + (2z - y)\hat{j} + (xy^2 - z)\hat{k}$ .

9. (a) If  $\vec{r}(t) = 7t^2\hat{i} + t^3\hat{j} - (t-1)\hat{k}$  then find  $\int_1^2 \left( \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$ .

যদি  $\vec{r}(t) = 7t^2\hat{i} + t^3\hat{j} - (t-1)\hat{k}$  হয় তাহলে  $\int_1^2 \left( \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$ -এর মান নির্ণয় কৰ।

যদি  $\vec{r}(t) = 7t^2\hat{i} + t^3\hat{j} - (t-1)\hat{k}$  ভए  $\int_1^2 \left( \vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right) dt$  নির্ণয় গৰ।

- (b) Find the volume of the tetrahedron where position vectors of its vertices are  $\hat{j} + 2\hat{k}, 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  and  $4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ .

$\hat{j} + 2\hat{k}, 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  এবং  $4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$  অবস্থান ভেক্টোর বিশিষ্ট শীর্ষবিন্দু দ্বাৰা গঠিত tetrahedron তিৰ আয়তন নির্ণয় কৰ।

চতুর্পার্শীয়কা শীর্ষহৰুকা স্থিতি ভ্যাকটৱেল  $\hat{j} + 2\hat{k}, 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  র ৰ  $4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$  ভए ত্যসকা আয়তন নির্ণয় গৰ।

- (c) Show that  $e^{5x}$  and  $e^{3x}$  are linearly independent solutions of  $y'' - 8y' + 15y = 0$ .  
Find the solution  $y(x)$  with the condition  $y(0) = 0$  and  $y'(0) = 1$ .

দেখাও যে  $e^{5x}$  এবং  $e^{3x}$ ,  $y'' - 8y' + 15y = 0$  সমীকৰণটিৰ দুটি রেখিকভাৱে স্বাধীন সমাধান।

$y(0) = 0$  এবং  $y'(0) = 1$  শত্রে  $y(x)$  সমাধানকে নির্ণয় কৰ।

$e^{5x}$  র  $e^{3x}$   $y'' - 8y' + 15y = 0$  কা রেখীয় স্বতন্ত্র সমাধান হো ভনী প্ৰমাণ গৰ। যদি  $y(0) = 0$  র  $y'(0) = 1$  ভए সমাধান  $y(x)$  নির্ণয় গৰ।

- 10.(a) Solve:  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$ .

সমাধান কৰঃ  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$ .

সমাধান গৰঃ  $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x$

- (b) Solve  $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x(1-x^2)$  given that  $y=x$  is a solution of its reduced equation.

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x(1-x^2)$  কে সমাধান কর যেখানে উক্ত সমীকরণটির সরলীকৃত (reduced) সমীকরণের একটি সমাধান  $y=x$  প্রদত্ত আছে।

সমাধান গর:  $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y = x(1-x^2)$  দিএকো ছ:  $y=x$  reduced সমিকরণকে সমাধান হো।

- 11.(a) A particle moves along the curve, whose equation is  $x=2t^2$ ,  $y=t^2-4t$ ,  $z=3t-5$  where  $t$  is time. Find the component of its acceleration at time  $t=1$  in  $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$  direction.

একটি কণা  $x=2t^2$ ,  $y=t^2-4t$ ,  $z=3t-5$  বক্ররেখা বরাবর চলমান যেখানে  $t$  হল সময়।  $t=1$  সময়ে  $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$  অভিমুখে ভ্রান্তের উপাংশটি নির্ণয় কর।

এটা কণ কণ  $x=2t^2$ ,  $y=t^2-4t$ ,  $z=3t-5$  কে সাথমা চলচ্ছ। জহাঁ  $t$  সময় হো। সময়  $t=1$  র  $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$  কো দিশামা প্রবেগকো ভাগ নির্ণয় গর।

- (b) Show that the vector field  $\vec{F}=(x^2-yz)\hat{i}+(y^2-zx)\hat{j}+(z^2-xy)\hat{k}$  is irrotational.

দেখাও যে ভেক্টরক্ষেত্র  $\vec{F}=(x^2-yz)\hat{i}+(y^2-zx)\hat{j}+(z^2-xy)\hat{k}$  টি irrotational।

ভেক্টর ক্ষেত্র  $\vec{F}=(x^2-yz)\hat{i}+(y^2-zx)\hat{j}+(z^2-xy)\hat{k}$  irrotational হো ভনী প্রমাণ গর।

- (c) Show that the vector field  $\vec{A}=(y^2+z^3)\hat{i}+(2xy-5z)\hat{j}+(3xz^2-5y)\hat{k}$  is conservative and find the scalar function for the field.

দেখাও যে  $\vec{A}=(y^2+z^3)\hat{i}+(2xy-5z)\hat{j}+(3xz^2-5y)\hat{k}$  ভেক্টরক্ষেত্রটি সংরক্ষিত (conservative) এবং উক্ত ক্ষেত্রের scalar অপেক্ষকটি নির্ণয় কর।

ভেক্টর ক্ষেত্র  $\vec{A}=(y^2+z^3)\hat{i}+(2xy-5z)\hat{j}+(3xz^2-5y)\hat{k}$  conservative হো ভনী প্রমাণ গর অনি ত্যস ক্ষেত্রকো লাগী scalar function নির্ণয় গর।

—x—