'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 4th Semester Examination, 2023

DSC1/2/3-P4-MATHEMATICS

DIFFERENTIAL EQUATION AND VECTOR CALCULUS

(REVISED SYLLABUS 2023)

Time Allotted: 2 Hours — Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
Symbols have their usual meaning.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions from the following: $3\times4=12$

যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख:

(a) What do you mean by degree and order of an ordinary differential equation? Find the degree and order of the D. E. 3

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right]^{1/3}$$

কোনো একটি সাধারণ অবকল সমীকরণের ক্রম (order) এবং ঘাত (degree) বলতে কি বোঝ ?

$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right]^{1/3}$ অবকল সমীকরণটির ক্রম এবং ঘাত নির্ণয় কর।

साधारण विभेदक समिकरणका डिग्री र क्रम भन्नाले के बुझिन्छ ?

$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^4\right]^{1/3}$ को डिग्री र क्रम निर्णय गर।

(b) Show that the function $f(x, y)=xy^2$ does not satisfy the Lipschitz condition on the strip $|x|\le1,\ |y|<\infty$. 3

দেখাও যে $f(x, y)=xy^2$ অপেক্ষকটি $|x|\le1$ এবং $|y|<\infty$ অঞ্চলে Lipschitz-এর শর্তটিকে সিদ্ধ করে না।

पट्टी $|x|\le1,\ |y|<\infty$ मा function $f(x, y)=xy^2$ ले Lipschitz शर्त सन्तुष्ट गर्दैन भनी प्रमाण गर।

(c) Show that the point at infinity is a regular singular point of the equation 3

$$x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$$

দেখাও যে $x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$ সমীকরণটির অসীম বিন্দুতে একটি regular singular বিন্দু আছে।

अनन्तमा भएको बिन्दु समिकरण $x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$ को नियमित सिंगुलर बिन्दु हो भनी प्रमाण गर।

(d) If $\vec{r}=3t^5\hat{i}+3t^2\hat{j}+2t^3\hat{k}$ then find $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$. 3

যদি $\vec{r}=3t^5\hat{i}+3t^2\hat{j}+2t^3\hat{k}$ হয় তবে $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$ -এর মান নির্ণয় কর।

यदि $\vec{r}=3t^5\hat{i}+3t^2\hat{j}+2t^3\hat{k}$ भए $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$ निर्णय गर।

(e) If the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are irrotational, then show that $\vec{a}\times\vec{b}$ is solenoidal. 3

যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় irrotational হয় তবে দেখাও যে $\vec{a}\times\vec{b}$ একটি solenoidal হবে।

यदि भ्याक्टर $\vec{a}$ र $\vec{b}$ irrotational भए $\vec{a}\times\vec{b}$ solenoidal हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(f) In what direction from the point $(1, 1, -1)$ the directional derivative of $\phi(x, y, z)=3x^4-2y^3+4z^2$ is maximum? 3

$(1, 1, -1)$ বিন্দু থেকে কোন্ দিক বরাবর $\phi(x, y, z)=3x^4-2y^3+4z^2$ -এর directional derivative সর্বোচ্চ হবে?

बिन्दु $(1, 1, -1)$ बाट कुन दीशामा $\phi(x, y, z)=3x^4-2y^3+4z^2$ को दिशात्मक derivative अधिकतम हुन्छ ?

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

Answer any *four* questions from the following $6\times4=24$

যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख

2. (a) If y_1 and y_2 are two linearly independent solutions of the linear differential equation $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$, then show that the Wronskian is $W(y_1, y_2)=Ae^{-\int p\,dx}$, where A is a constant. 3

যদি $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$ রৈখিক অবকল সমীকরণের y_1 এবং y_2 দুটি রৈখিকভাবে স্বতন্ত্র (linearly independent) সমাধান হয় তবে দেখাও যে Wronskian টি $W(y_1, y_2)=Ae^{-\int p\,dx}$ হবে, যেখানে A একটি ধ্রুবক।

यदि y_1 र y_2 विभेदक समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0$ का रेखीय स्वतन्त्र समाधानहरू भए। Wronskian $W(y_1, y_2)=Ae^{-\int p\,dx}$ हुन्छ भनी प्रमाण गर। A एउटा स्थिर मान हो।

(b) Find the particular integral of the equation $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{1}{2}e^x\sin x$. 3

$\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{1}{2}e^x\sin x$ সমীকরণটির particular integral টি নির্ণয় কর।

समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\frac{1}{2}e^x\sin x$ का particular integral निर्णय गर।

3. Solve the equation $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}=x^2$ by using the method of undetermined co-efficients. 6

Undetermined co-efficients পদ্ধতি ব্যবহার করে $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}=x^2$ সমীকরণকে সমাধান কর।

Undetermined co-efficient को पद्धति प्रयोग गरेर समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}=x^2$ लाई समाधान गर।

4. Solve by the method of variation of parameters 6

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x^2e^x}.$$

Variation of parameters পদ্ধতির সাহায্যে $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x^2e^x}$ সমীকরণকে সমাধান কর।

Variation of parameter को पद्धति प्रयोग गरेर समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x^2e^x}$ लाई समाधान गर।

5. Solve the following simultaneous linear equations: 6

নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণগুলিকে সমাধান করঃ

तल दिएको समिकरण प्रणालीलाई समाधान गर:

$$\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t$$

$$\frac{dy}{dt}-x+3y=e^{2t}.$$

6. (a) Examine whether the vector valued function $\vec{r}=t^3\hat{i}+e^t\hat{j}+\frac{1}{t+3}\hat{k}$ is continuous at $t=-3$ or not. 3

$\vec{r}=t^3\hat{i}+e^t\hat{j}+\frac{1}{t+3}\hat{k}$ ভেক্টর মান বিশিষ্ট অপেক্ষকটি $t=-3$ তে সন্তত কিনা পরীক্ষা কর।

भेक्टर मान function $\vec{r}=t^3\hat{i}+e^t\hat{j}+\frac{1}{t+3}\hat{k}$ $t=-3$ मा निरन्तर हुन्छ या हुँदैन जाँच गर्नुहोस्।

(b) Find the work done in traversing around a unit circle in the xy-plane counterclockwise against a force field 3

$$\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}.$$

xy -সমতলে একটি একক বৃত্তপথের চারপাশে ঘড়ির কাটার বিপরীতমুখি

$$\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}$$

বলক্ষেত্রে কৃতকার্যটি নির্ণয় কর।

xy -सतहमा भएका इकाई बृत्तको वरिपरि घड़ीको विपरीत दिशामा अनि बल क्षेत्र $\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}$ को विपरीत पार गर्दा गरिने काम निर्णय गर।

7. (a) Show that $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$. 2

দেখাও যে $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$.

प्रमाण गरः $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$।

(b) Prove that for any four vectors $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$, 2+2

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ চারটি ভেক্টরের জন্য প্রমাণ করঃ

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

प्रमाण गरः कुनै चार भ्याक्टर $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ को लागी

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर लेख

8. (a) If $\vec{F}=\phi\vec{\nabla}\phi$, then show that $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$. 4

যদি $\vec{F}=\phi\vec{\nabla}\phi$ তাহলে দেখাও যে $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$।

यदि $\vec{F}=\phi\vec{\nabla}\phi$ भए प्रमाण गर $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$।

(b) Prove that $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, for any vector function $\vec{A}$. 4

প্রমাণ কর $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, যেকোন ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{A}$ -এর জন্য।

प्रमाण गर: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, कुनै vector function $\vec{A}$ को लागी।

(c) Evaluate the line integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ along the curve $C: x^2+y^2=1,\ z=2$ in the positive direction from $A(1,0,2)$ to $B(0,1,2)$ where $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$. 4

$C: x^2+y^2=1,\ z=2$ বক্ররেখা বরাবর $A(1,0,2)$ থেকে $B(0,1,2)$ পর্যন্ত ধনাত্মক দিকে (positive direction)

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

line integral টি নির্ণয় কর, যেখানে $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$

रेखा integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ वक्र $C: x^2+y^2=1,\ z=2$, को positive दिशा $A(1,0,2)$ देखी $B(0,1,2)$ मा मूल्यांकन गर। $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$

9. (a) If $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ then find $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$. 4

যদি $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ হয় তবে $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$ -এর মান নির্ণয় কর।

यदि $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ भए $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$ निर्णय गर।

(b) Find the volume of the tetrahedron where position vectors of its vertices are $\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ and $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$. 3

$\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ এবং $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ অবস্থান ভেক্টর বিশিষ্ট শীর্ষবিন্দু দ্বারা গঠিত tetrahedron-এর আয়তন নির্ণয় কর।

चतुर्पक्षीयका शीर्षहरूका स्थिति भ्याक्टरहरू $\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ र $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ भए त्यसका आयतन निर्णय गर।

(c) Show that e^{5x} and e^{3x} are linearly independent solutions of $y''-8y'+15y=0$. Find the solution $y(x)$ with the condition $y(0)=0$ and $y'(0)=1$. 5

দেখাও যে e^{5x} এবং e^{3x} দুটি $y''-8y'+15y=0$ সমীকরণের রৈখিকভাবে স্বাধীন সমাধান। $y(0)=0$ এবং $y'(0)=1$ শর্তে $y(x)$ সমাধানকে নির্ণয় কর।

e^{5x} र e^{3x} $y''-8y'+15y=0$ का रेखीय स्वतन्त्र समाधान हो भनी प्रमाण गर। यदि $y(0)=0$ र $y'(0)=1$ भए समाधान $y(x)$ निर्णय गर।

10.(a) Define phase portrait. 1

Phase portrait কে সংজ্ঞায়িত কর।

Phase portrait का परिभाषा लेख।

(b) Solve the linear autonomous system 6+3+2

$$\dot{x} = x + y\,,\ \dot{y} = 4x - 2y$$

subject to the initial condition $(x_0, y_0) = (2, -3)$. Determine the nature of the critical point of the system and draw the phase portrait for the system.

$(x_0, y_0) = (2, -3)$ প্রারম্ভিক শর্ত হলে $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = 4x - 2y$ linear autonomous system কে সমাধান কর।

উক্ত system টির critical বিন্দুগুলির প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং system-এর phase portrait টি অঙ্কন কর।

रेखीय स्वायत्त प्रणाली समाधान गर:

$$\dot{x} = x + y\,,\ \dot{y} = 4x - 2y$$

प्रारम्भिक शर्त $(x_0, y_0) = (2, -3)$ को अधीनमा प्रणालीको critical बिन्दुहरूको प्रकृती खोज गर अनि प्रणालीको phase portrait अंकित गर।

11.(a) Examine whether the differential equation $(y^2e^x + 2xy)dx - x^2dy = 0$ is exact. 2

$(y^2e^x + 2xy)dx - x^2dy = 0$ অবকল সমীকরণটি exact কিনা পরীক্ষা কর।

विभेदक समिकरण $(y^2e^x + 2xy)dx - x^2dy = 0$ exact हो अथवा होइन जाँच गर।

(b) Show that the vector field $\vec{F} = (x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$ is irrotational. 3

দেখাও যে ভেক্টরক্ষেত্র $\vec{F} = (x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$ টি irrotational.

भेक्टर क्षेत्र $\vec{F} = (x^2 - yz)\hat{i} + (y^2 - zx)\hat{j} + (z^2 - xy)\hat{k}$ irrotational हो भनी प्रमाण गर।

(c) Show that the vector field $\vec{A} = (y^2 + z^3)\hat{i} + (2xy - 5z)\hat{j} + (3xz^2 - 5y)\hat{k}$ is conservative and find the scalar function for the field. 3+4

দেখাও যে $\vec{A} = (y^2 + z^3)\hat{i} + (2xy - 5z)\hat{j} + (3xz^2 - 5y)\hat{k}$ ভেক্টর ক্ষেত্রটি সংরক্ষিত (conservative) এবং উক্ত ক্ষেত্রের scalar অপেক্ষকটি নির্ণয় কর।

भेक्टर क्षेत्र $\vec{A} = (y^2 + z^3)\hat{i} + (2xy - 5z)\hat{j} + (3xz^2 - 5y)\hat{k}$ conservative हो भनि प्रमाण गर अनि त्यस क्षेत्रको लागी scalar function निर्णय गर।

——×——

'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 4th Semester Examination, 2023

DSC1/2/3-P4-MATHEMATICS

DIFFERENTIAL EQUATION AND VECTOR CALCULUS

(OLD SYLLABUS 2018)

Time Allotted: 2 Hours Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions from the following: $3\times 4 = 12$

যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेखः

(a) Find $\dfrac{1}{D^2-7D+10}\{2e^{5x}+7e^{10}+x\}$.

$\dfrac{1}{D^2-7D+10}\{2e^{5x}+7e^{10}+x\}$-এর মান নির্ণয় কর।

$\dfrac{1}{D^2-7D+10}\{2e^{5x}+7e^{10}+x\}$ निर्णय गर।

(b) Show that the function $f(x,y)=xy^2$ does not satisfy the Lipschitz condition on the strip $|x|\le 1,\ |y|<\infty$.

দেখাও যে $f(x,y)=xy^2$ অপেক্ষকটি $|x|\le 1$ এবং $|y|<\infty$ অঞ্চলে Lipschitz-এর শর্তটিকে সিদ্ধ করে না।

पट्टी $|x|\le 1,\ |y|<\infty$ मा function $f(x,y)=xy^2$ ले Lipschitz शर्त सन्तुष्ट गर्दैन भनी प्रमाण गर।

(c) Show that the point at infinity is a regular singular point of the equation

$$x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$$

দেখাও যে $x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$ সমীকরণটির অসীম বিন্দুতে একটি regular singular বিন্দু আছে।

अनन्तमा भएको बिन्दु समिकरण $x^2y''+(3x-1)y'+3y=0$ को नियमित सिंगुलर बिन्दु हो भनी प्रमाण गर।

(d) If $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$ then find $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$.

যদি $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$ হয় $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$ -এর মান নির্ণয় কর।

यदि $\vec{r} = 3t^5\hat{i} + 3t^2\hat{j} + 2t^3\hat{k}$ भए $\left[\frac{d\vec{r}}{dt}\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right]$ निर्णय गर।

(e) If the vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are irrotational, then show that $\vec{a} \times \vec{b}$ is solenoidal.

যদি $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয় irrotational হয় তবে দেখাও যে $\vec{a} \times \vec{b}$ একটি solenoidal হবে।

यदि भेक्टर $\vec{a}$ र $\vec{b}$ irrotational भए $\vec{a} \times \vec{b}$ solenoidal हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(f) In what direction from the point $(1, 1, -1)$ the directional derivative of $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$ is maximum?

$(1, 1, -1)$ বিন্দু থেকে কোন দিক বরাবর $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$ -এর directional derivative সর্বোচ্চ হবে?

बिन्दु $(1, 1, -1)$ बाट कुन दीशामा $\phi(x, y, z) = 3x^4 - 2y^3 + 4z^2$ को दिशात्मक derivative अधिकतम हुन्छ?

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

Answer any *four* questions from the following $6\times4 = 24$

যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

কুনৈ চার প্রশ্নহরুকো উত্তর লেখ

2. (a) If y_1 and y_2 are two linearly independent solutions of the linear differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$, then show that the Wronskian is $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p\,dx}$, where A is a constant. 3

যদি $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ রৈখিক অবকল সমীকরণের y_1 এবং y_2 দুটি রৈখিকভাবে স্বতন্ত্র (linearly independent) সমাধান হয় তবে দেখাও যে Wronskian টি হবে $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p\,dx}$ । যেখানে A হল ধ্রুবক।

यदि y_1 र y_2 विभेदक समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$ का रेखीय स्वतन्त्र समाधानहरू भए। Wronskian $W(y_1, y_2) = Ae^{-\int p\,dx}$ हुन्छ भनि प्रमाण गर। A एउटा स्थिर मान हो।

(b) Find the particular integral of the equation $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$. 3

$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$ সমীকরণটির particular integral টি নির্ণয় কর।

समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{1}{2}e^x \sin x$ का particular integral निर्णय गर।

3. Solve the equation $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}=x^2$ by using the method of undetermined co-efficients. 6

Undetermined co-efficient পদ্ধতি ব্যবহার করে $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}=x^2$ কে সমাধান কর।

Undetermined co-efficient को पद्धति प्रयोग गरेर समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}=x^2$ लाई समाधान गर।

4. Solve by the method of variation of parameters 6

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x^2e^x}.$$

Variation of parameter পদ্ধতির সাহায্যে সমাধান করঃ $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x^2e^x}$ ।

Variation of parameter को पद्धतिलाई प्रयोग गरेर समिकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{x^2e^x}$ लाई समाधान गर।

5. Solve the following simultaneous linear equations: 6

নিম্নলিখিত রৈখিক সমীকরণগুলিকে সমাধান করঃ

तल दिइएको समिकरण प्रणालीलाई समाधान गर:

$$\frac{dx}{dt}+5x+y=e^t$$
$$\frac{dy}{dt}-x+3y=e^{2t}.$$

6. (a) Examine whether the vector valued function $\vec{r}=t^3\hat{i}+e^t\hat{j}+\frac{1}{t+3}\hat{k}$ is continuous at $t=-3$ or not. 3

$\vec{r}=t^3\hat{i}+e^t\hat{j}+\frac{1}{t+3}\hat{k}$ ভেক্টরমান বিশিষ্ট অপেক্ষকটি $t=-3$ তে সন্তত কিনা পরীক্ষা কর।

भेक्टर मान function $\vec{r}=t^3\hat{i}+e^t\hat{j}+\frac{1}{t+3}\hat{k}$ $t=-3$ मा निरन्तर (continuous) हुन्छ या हुँदैन जाँच गर्नुहोस्।

(b) Find the work done in traversing around a unit circle in the xy-plane counterclockwise against a force field 3

$$\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}.$$

xy -সমতলে একটি একক বৃত্তপথের চারপাশে ঘড়ির কাটার বিপরীতমুখী

$$\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}$$

বলক্ষেত্রে কৃতকার্যটি নির্ণয় কর।

xy -সতहमा भएका इकाई वृत्तको वरिपरि घड़ीको विपरीत दिशामा अनि बल क्षेत्र $\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\hat{i}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\hat{j}$ को विपरीत पार गर्दा गरिने काम निर्णय गर।

7. (a) Show that $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$. 2

দেখাও যে $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$.

प्रमाण गरः $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{O}$

(b) Prove that for any four vectors $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$, 2+2

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ চারটি ভেক্টরের জন্য প্রমাণ করঃ

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

प्रमाण गरः कुनै चार भ्याक्टर $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ को लागी

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= [\vec{a}\vec{b}\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]\vec{d}\\ &= [\vec{a}\vec{c}\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b}\vec{c}\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions from the following $12\times2=24$

যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर लेख

8. (a) If $\vec{F}=\phi\vec{\nabla}\phi$, then show that $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$. 4

যদি $\vec{F}=\phi\vec{\nabla}\phi$ তাহলে দেখাও যে $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$

यदि $\vec{F}=\phi\vec{\nabla}\phi$ भए प्रमाण गर $\vec{F}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{F})=0$

(b) Prove that $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, for any vector function $\vec{A}$. 4

প্রমাণ কর $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, যেকোন ভেক্টর অপেক্ষক $\vec{A}$ -এর জন্য।

प्रमाण गरः $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A})=0$, कुनै vector function $\vec{A}$ को लागी।

(c) Evaluate the line integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ along the curve $C: x^2+y^2=1$, $z=2$ in the positive direction from $A(1,0,2)$ to $B(0,1,2)$ where $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$. 4

$C: x^2+y^2=1$, $z=2$ বক্ররেখা বরাবর $A(1,0,2)$ থেকে $B(0,1,2)$ পর্যন্ত ধনাত্মক দিকে (positive direction)

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

line integral টি নির্ণয় কর, যেখানে $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$.

रेखा integral $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ वक्र $C: x^2+y^2=1$, $z=2$, को positive दिशा $A(1,0,2)$ देखी $B(0,1,2)$ मा मूल्यांकन गर। $\vec{F}=(y+xz^2)\hat{i}+(2z-y)\hat{j}+(xy^2-z)\hat{k}$.

9. (a) If $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ then find $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$. 4

যদি $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ হয় তাহলে $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$ -এর মান নির্ণয় কর।

यदि $\vec{r}(t)=7t^2\hat{i}+t^3\hat{j}-(t-1)\hat{k}$ भए $\int_1^2\left(\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)dt$ निर्णय गर।

(b) Find the volume of the tetrahedron where position vectors of its vertices are $\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ and $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$. 2

$\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ এবং $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ অবস্থান ভেক্টর বিশিষ্ট শীর্ষবিন্দু দ্বারা গঠিত tetrahedron টির আয়তন নির্ণয় কর।

चतुर्पार्श्वीयका शीर्षहरूका स्थिति भ्याक्टरहरू $\hat{j}+2\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ र $4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ भए त्यसका आयतन निर्णय गर।

(c) Show that e^{5x} and e^{3x} are linearly independent solutions of $y''-8y'+15y=0$. Find the solution $y(x)$ with the condition $y(0)=0$ and $y'(0)=1$. 2+4

দেখাও যে e^{5x} এবং e^{3x}, $y''-8y'+15y=0$ সমীকরণটির দুটি রৈখিকভাবে স্বাধীন সমাধান। $y(0)=0$ এবং $y'(0)=1$ শর্তে $y(x)$ সমাধানকে নির্ণয় কর।

e^{5x} र e^{3x} $y''-8y'+15y=0$ का रेखीय स्वतन्त्र समाधान हो भनी प्रमाण गर। यदि $y(0)=0$ र $y'(0)=1$ भए समाधान $y(x)$ निर्णय गर।

10.(a) Solve: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$. 6

সমাধান করঃ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$.

समाधान गर: $x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=2\log x$

(b) Solve $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=x(1-x^2)$ given that $y=x$ is a solution of its reduced equation. 6

$(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=x(1-x^2)$ কে সমাধান কর যেখানে উক্ত সমীকরণটির সরলীকৃত (reduced) সমীকরণের একটি সমাধান $y=x$ প্রদত্ত আছে।

समाधान गरः $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}+x\dfrac{dy}{dx}-y=x(1-x^2)$ दिएको छः $y=x$ reduced समिकरणको समाधान हो।

11.(a) A particle moves along the curve, whose equation is $x=2t^2$, $y=t^2-4t$, $z=3t-5$ where t is time. Find the component of its acceleration at time $t=1$ in $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ direction. 3

একটি কণা $x=2t^2$, $y=t^2-4t$, $z=3t-5$ বক্ররেখা বরাবর চলমান যেখানে t হল সময়। $t=1$ সময়ে $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ অভিমুখে ত্বরণের উপাংশটি নির্ণয় কর।

एउटा कण वक्र $x=2t^2$, $y=t^2-4t$, $z=3t-5$ को साथमा चल्छ। जहाँ t समय हो। समय $t=1$ र $\vec{a}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ को दिशामा प्रवेगको भाग निर्णय गर।

(b) Show that the vector field $\vec{F}=(x^2-yz)\hat{i}+(y^2-zx)\hat{j}+(z^2-xy)\hat{k}$ is irrotational. 3

দেখাও যে ভেক্টরক্ষেত্র $\vec{F}=(x^2-yz)\hat{i}+(y^2-zx)\hat{j}+(z^2-xy)\hat{k}$ টি irrotational.

भेक्टर क्षेत्र $\vec{F}=(x^2-yz)\hat{i}+(y^2-zx)\hat{j}+(z^2-xy)\hat{k}$ irrotational हो भनी प्रमाण गर।

(c) Show that the vector field $\vec{A}=(y^2+z^3)\hat{i}+(2xy-5z)\hat{j}+(3xz^2-5y)\hat{k}$ is conservative and find the scalar function for the field. 3+3

দেখাও যে $\vec{A}=(y^2+z^3)\hat{i}+(2xy-5z)\hat{j}+(3xz^2-5y)\hat{k}$ ভেক্টরক্ষেত্রটি সংরক্ষিত (conservative) এবং উক্ত ক্ষেত্রের scalar অপেক্ষকটি নির্ণয় কর।

भेक्टर क्षेत्र $\vec{A}=(y^2+z^3)\hat{i}+(2xy-5z)\hat{j}+(3xz^2-5y)\hat{k}$ conservative हो भनी प्रमाण गर अनि त्यस क्षेत्रको लागी scalar function निर्णय गर।

——×——