'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 6th Semester Examination, 2022

CC13-MATHEMATICS

RING THEORY AND LINEAR ALGEBRA-II

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

GROUP-A

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

1. Find all the prime ideals in the ring $\mathbb{Z}_8$.

2. Express the ideal $4\mathbb{Z} + 10\mathbb{Z}$ in the ring $\mathbb{Z}$ as a principal ideal of $\mathbb{Z}$.

3. Show that $1-i$ is irreducible in $\mathbb{Z}[i]$.

4. Give an example of a matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ such that A has no eigenvalue.

5. Test for the diagonalizability of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in $M_2(\mathbb{R})$.

6. If S_1 and S_2 are two subsets of a vector space V such that $S_1 \subseteq S_2$ then prove that $S_2^0 \subseteq S_1^0$. Here S^0 denotes the annihilator of S.

GROUP-B

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

7. (a) Show that $I = \{(a, 0) : a \in \mathbb{Z}\}$ is a prime ideal but not a maximal ideal in the ring $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. 3

   (b) Prove that in an integral domain, every prime element is an irreducible element. Is the converse true? Justify your answer. 3

8. (a) Show that $2+11i$ and $2-7i$ are relatively prime in the integral domain $\mathbb{Z}[i]$. 3

   (b) Prove that $K[x]$ is a Euclidean domain where K is a field. 3

9. (a) Let $\mathcal{B}=\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ be a basis for $\mathbb{R}^3$, where $\beta_1=(1, 0, -1)$, $\beta_2=(1, 1, 1)$ and $\beta_3=(2, 2, 0)$. Find the dual basis of $\mathcal{B}$. 3

(b) Let W be the subspace of $\mathbb{R}^5$ which is spanned by the vectors $\alpha_1=(2, -2, 3, 4, -1)$, $\alpha_2=(-1, 1, 2, 5, 2)$, $\alpha_3=(0, 0, -1, -2, 3)$ and $\alpha_4=(1, -1, 2, 3, 0)$. Find W^0. 3

10.(a) Let V be a vector space over a field F and $T: V \to V$ be a linear operator. Suppose $\chi_T(t)$ and $m(t)$ are the characteristic polynomial and minimal polynomial of T respectively. Then prove that $m(t)$ divides $\chi_T(t)$. 3

(b) Prove that for all α, β in a Euclidean space V, $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ iff $\| \alpha + \beta \|^2 = \| \alpha \|^2 + \| \beta \|^2$. 3

11.(a) Let V be an inner product space and T be a linear operator on V. Then prove that T is an orthogonal projection iff T has an adjoint T^* and $T^2 = T = T^*$. 4

(b) State Bessel's inequality regarding an orthogonal set of nonzero vectors in an inner product space V. 2

12.(a) Apply Gram-Schmidt process to the given subset S of the inner product space V to obtain an orthonormal basis $\mathcal{B}$ for span (S), where $V = \mathbb{R}^3$ and $S = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$. 4

(b) Let $A \in M_2(\mathbb{R})$, where $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Show that A is diagonalizable. 2

GROUP-C

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

13.(a) Let R be an integral domain. Suppose there exists a function $\delta: R \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ such that for all $a, b \in R \setminus \{0\}$, $\delta(ab) \geq \delta(b)$, where equality holds iff a is a unit. Then prove that R is a factorization domain. 6

(b) If p be a nonzero non-unit element in a PID D, then prove that the following statements are equivalent: 6

(i) p is a prime element in D.

(ii) p is an irreducible element in D.

(iii) $\langle p \rangle$ is a nonzero maximal ideal of D.

(iv) $\langle p \rangle$ is a nonzero prime ideal of D.

14.(a) Prove that the integral domains $\mathbb{Z}[i\sqrt{n}]$ for $n = 6, 7, 10$ are factorization domains but not unique factorization domains. 6

(b) Let $V = M_n(\mathbb{R})$ and $B \in V$ be a fixed vector. If T is the linear operator on V defined by $T(A) = AB - BA$ and if f is the trace function, what is $T^t(f)$? Here T^t denotes the transpose of T. 4

(c) Let $\langle\ ,\ \rangle$ be the standard inner product on $\mathbb{R}^2$. Let $\alpha = (1, 2)$ and $\beta = (-1, 1)$. If γ is a vector such that $\langle \alpha, \gamma \rangle = -1$ and $\langle \beta, \gamma \rangle = 3$, find γ. 2

15.(a) Let F be a field and f be the linear functional on F^2, defined by $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Then find $T^t f$, where $T : F^2 \to F^2$ is a linear operator defined by $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\ x_1 + x_2)$ for all $(x_1, x_2) \in F^2$. 4

(b) Find the minimal polynomial of the matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$, where 5

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Let T_1 and T_2 be two linear operators on an inner product space V. Then prove that $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$. 3

16.(a) Let V be an n-dimensional inner product space and W be a subspace of V. Then prove that $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$, where $W^\perp$ denotes the orthogonal complement of W. 5

(b) Let T be a linear operator on a finite dimensional vector space V and let $f(t)$ be the characteristic polynomial of T. Then prove that $f(T) = T_0$, where T_0 denotes the zero transformation. 4

(c) Let V be a finite dimensional vector space and W be a subspace of V. Then $\dim(W^0) = \dim V - \dim W$. 3

——×——

'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 6th Semester Examination, 2022

CC14-MATHEMATICS

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIONS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

GROUP-A

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

1. Solve the partial differential equation $p\tan x + q\tan y = \tan z$. 3

2. Eliminate the arbitrary function f to obtain a partial differential equation from $z = y^2 + 2f\left(\frac{1}{x} + \log y\right)$. 3

3. Find the region in the xy-plane where the partial differential equation $\{(x-y)^2 - 1\}z_{xx} + 2z_{xy} + \{(x-y)^2 - 1\}z_{yy} = 0$ is hyperbolic. 3

4. Find the characteristic curves of $\sin^2 x\, z_{xx} + 2\cos x\, z_{xy} - z_{yy} = 0$. 3

5. Find the degree of the following PDE: 3

$$z_{xx}^2 + 2z_y + \sin(z_x) = x^2 y$$

Write down the relation between arbitrary constants, independent variables and order of a PDE.

6. Obtain a solution of the partial differential equation $xp + yq = z$ representing a surface passing through the parabola $y^2 = 4x,\ z = 1$. 3

GROUP-B

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

7. Apply $\sqrt{u} = v$ and $v(x, y) = f(x) + g(y)$ to solve the equation $x^4 u_x^2 + y^2 u_y^2 = 4u$. 6

8. Reduce the equation $y^2 u_{xx} - 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy} = \frac{y^2}{x}u_x + \frac{x^2}{y}u_y$ to a canonical form. 6

9. Solve the non-homogeneous wave equation: 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \exp(-x), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

with the conditions: $u(x, 0) = x^2$, $u_t(x, 0) = \cos x$

10. A tightly stretched string of length l with fixed ends is initially in equilibrium position. It is set vibrating by giving each point a velocity $\sin^3(\pi x/l)$. Find the displacement of the string out any distance from one end at any time t. 6

11. Find the temperature distribution in a laterally insulated rod of length 'l' whose ends are also insulated and the initial temperature is given by 6

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{if } 0 < x \le l/2 \\ l - x & \text{if } l/2 < x < l \end{cases}$$

Where $u(x, t)$ represents temperature distribution, x is the spatial coordinate and t is the time coordinate. Also $u(x, t)$ is bounded as $t \to \infty$.

12. Reduce the equation $u_{xy} + xu_{yy} = 0$, $x > 0$ to its canonical form. 6

GROUP-C

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

13.(a) Obtain the differential equation eliminating the arbitrary functions f and g from 6

$$z = y\,f(x) + x\,g(y)$$

(b) Reduce the equation $z_{xx} - 4z_{xy} + 4z_{yy} + z = 0$ to its canonical form. 6

14.(a) Obtain the general solution of wave equation for a semi-infinite string with free end boundary condition, given that initial deflection $u(x, 0) = f(x)$ and initial velocity $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ where $u(x, t)$ represents the vertical deflection of string, x is the spatial coordinate and t is the time coordinate. Also discuss the case when initial velocity is zero. 6

(b) Solve the PDE $\cos(x + y)\,z_x + \sin(x + y)\,z_y = z$. Classify the PDE. 5+1=6

15.(a) Show that the equations $xp - yq = x$, $x^2 p + q = xz$ are compatible and find their solution. 6

(b) Find the characteristic strips of the equation $xp + yq - pq = 0$ and obtain the equation of the integral surface through the curve $C: z = x/2$, $y = 0$. 6

16.(a) Use separation of variable to solve $4\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 3u$, given $u = 3e^{-y} - e^{-5y}$ when $x = 0$. 4

(b) Use Lagrange's method to solve: $x^2(y - z)p + y^2(z - x)q = z^2(x - y)$ 4

(c) Use Charpit's method to solve: $p(p^2 + 1) + (b - z)q = 0$ 4

——×——

'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 6th Semester Examination, 2022

DSE1/2/3-P2-MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains paper DSE-2A and DSE-2B.
The candidates are required to answer any *one* from *two* courses.
Candidates should mention it clearly on the Answer Book.

DSE-2A

LINEAR PROGRAMMING

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12
নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও
तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

1. Prove that, the set defined by $X = \{x : |x| \le 2\}$ is a convex set. 3
প্রমাণ কর, সেট $X = \{x : |x| \le 2\}$ একটি উত্তল সেট।
$X = \{x : |x| \le 2\}$ ले परिभाषित set एउटा convex set हो भनी प्रमाण गर।

2. Use dominance to reduce the pay-off matrix and solve the game with the following pay-off matrix: 3
ডমিনেন্স (Dominance) পদ্ধতি ব্যবহার করে নিম্নলিখিত পে-অফ/পরিশোধ ম্যাট্রিক্সকে রিডিউস (reduce) কর এবং নিম্নলিখিত পরিশোধ ম্যাট্রিক্স (Pay off matrix) বিশিষ্ট খেলা (Game)-কে সমাধান করঃ
दिइएको pay-off matrix लाई dominance प्रयोग गरी घटाएर त्यसको खेल (game) समाधान गर।

	B_1	B_2	B_3
A_1	6	8	6
A_2	4	12	2

3. Find the dual of the following L.P.P.: 3
दिइएको L.P.P. बाट dual निर्णय गर।

Minimize $Z = -6x_1 - 8x_2 + 10x_3$

Subject to, $x_1 + x_2 - x_3 \ge 2$

$2x_1 - x_3 \ge 1$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$

নিম্নলিখিত এল.পি.পি. (L.P.P.)-এর Dual বের কর -

সর্বনিম্ন (Minimize) $Z = -6x_1 - 8x_2 + 10x_3$

-এর সাপেক্ষে (Subject to), $x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$

$2x_1 - x_3 \geq 1$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

4. Solve the following problem graphically: 3

দিইএকো সমস্যালাই গ্রাফিক রুপমা সমাধান গর।

Minimize $Z = 3x_1 + x_2$

Subject to, $2x_1 + 3x_2 \geq 2$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত সমস্যা সমাধান করঃ

সর্বনিম্ন (Minimize) $Z = 3x_1 + x_2$

-এর সাপেক্ষে (Subject to), $2x_1 + 3x_2 \geq 2$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

5. Find the extreme points, if any, of the set $X = \{(x,\ y) : |x| \leq 2,\ |y| \leq 1\}$. 3

সেট $X = \{(x,\ y) : |x| \leq 2,\ |y| \leq 1\}$ -এর কোন চরম বিন্দুসমূহ (extreme points) থাকলে তা বের কর।

যদি ছ भने, set $X = \{(x,\ y) : |x| \leq 2,\ |y| \leq 1\}$ को चरम बिन्दु निर्णय गर।

6. Write down the following L.P.P. in standard form: 3

Standard form मा दिइएको L.P.P. लाई लेखः

Minimize $Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3$

Subject to, $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

নিম্নলিখিত এল.পি.পি. (L.P.P.)-কে প্রমাণ আকারে (Standard form) পরিণত করঃ

সর্বনিম্ন (Minimize) $Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3$

-এর সাপেক্ষে, (Subject to), $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

7. Show that $x_1 = 5,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$ is a basic solution of the system of equations 6

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$$

Find the other basic solutions (if any).

দেখাও যে, $x_1 = 5,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$ সমীকরণ সিস্টেম $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$, $2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$-এর মৌলিক সমাধান (Basic solution)। অন্য মৌলিক সমাধান (Basic solution) থাকলে তা বের কর।

$x_1 = 5,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$ समिकरणहरूको प्रणाली $x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5$ को basic समाधान हो भनी प्रमाण गर। यदि छ भने अरू basic समाधानहरू पनि निर्णय गर।

8. Draw graphically the feasible space, if any, given by the following L.P.P. and find out the extreme points of the feasible region. 6

दिइएको L.P.P. बाट यदि सम्भाव्य ठाँउ (Feasible space) छ भने ग्राफिक रूपमा चित्रण गर अनि सम्भाव्य क्षेत्र को चरम बिन्दुहरू पनि खोज् गर।

Maximize $Z = 2x_1 + 5x_2$

Subject to, $5x_1 + 6x_2 \geq 30$

$3x_1 + 2x_2 \leq 21$

$x_1 + x_2 \leq 12 \quad ; \quad x_1,\ x_2 \geq 0$

লেখচিত্রের মাধ্যমে, নিম্নলিখিত এল.পি.পি. (L.P.P.)-এর সম্ভাব্য জায়গা/স্থান (Feasible space) যদি থাকে তবে বের কর এবং সম্ভাব্য অঞ্চল (Feasible region)-এর চরম বিন্দুসমূহ (Extreme points) বের কর।

সর্বাধিক (Maximize) $Z = 2x_1 + 5x_2$

-এর সাপেক্ষে (Subject to), $5x_1 + 6x_2 \geq 30$

$3x_1 + 2x_2 \leq 21$

$x_1 + x_2 \leq 12 \quad ; \quad x_1,\ x_2 \geq 0$

9. Find the minimum cost solution for the 4×4 assignment problem whose cost coefficients are given by: 6

4×4 assignment समस्याको न्यूनतम लागत समाधान खोज गर, जस्को लागत गुणांक यस प्रकार छ।

	I	II	III	IV
A	2	–1	–1	–2
B	1	0	–2	–1
C	1	–1	–2	0
D	2	2	1	1

নিম্নলিখিত 4×4 অর্পিত সমস্যার (Assignment problem) সর্বনিম্ন মূল্য সমাধান (Minimum cost solution) বের কর, যার মূল্য সহগসমূহ (Cost coefficients) দেওয়া হয়েছে।

	I	II	III	IV
A	2	–1	–1	–2
B	1	0	–2	–1
C	1	–1	–2	0
D	2	2	1	1

10. Solve the following L.P.P. by Simplex method: 6

দিইএকো L.P.P. লাই Simplex পদ্ধতি দ্বারা সমাধান গর।

Minimize $Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$

Subject to, $3x_2 - x_3 + 2x_5 \le 7$

$-2x_2 + 4x_3 \le 12$

$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 \le 10$

$x_2,\ x_3,\ x_5 \ge 0$

নিম্নলিখিত এল.পি.পি. (L.P.P.)-টি সরলীকৃত পদ্ধতিতে (Simplex method) সমাধান করঃ

সর্বনিম্ন (Minimize) $Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5$

-এর সাপেক্ষে (Subject to), $3x_2 - x_3 + 2x_5 \le 7$

$-2x_2 + 4x_3 \le 12$

$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 \le 10$

$x_2,\ x_3,\ x_5 \ge 0$

11. Solve the following transportation problem: 6

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটি (Transportation problem) সমাধান করঃ

দিইএকো transportation সমস্যা সমাধান গর।

	D_1	D_2	D_3
O_1	0	2	1
O_2	2	1	5
O_3	2	4	3

12. Use Big-M method to solve the following L.P.P.: 6

Big-M পদ্ধতি দ্বারা দিইএকো L.P.P. সমাধান গর।

Maximize $Z = 3x_1 - x_2$

Subject to, $2x_1 + x_2 \ge 2$

$x_1 + 3x_2 \le 3$

$x_2 \le 4$; $x_1,\ x_2 \ge 0$

বিগ-এম পদ্ধতি (Big-M method) ব্যবহার করে নিম্নলিখিত এল.পি.পি (L.P.P.) সমাধান করঃ

সর্বাধিক (Maximize) $Z = 3x_1 - x_2$

-এর সাপেক্ষে (Subject to), $2x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 + 3x_2 \leq 3$

$x_2 \leq 4 \quad ; \quad x_1, x_2 \geq 0$

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

13.(a) Solve graphically the following game: 4

নিম্নলিখিত খেলাটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করঃ

दिइएको खेललाई ग्राफिक रूपमा समाधान गर।

	B_1	B_2	B_3
A_1	1	3	11
A_2	8	5	2

(b) Using following cost matrix, determine optimal job assignment and the cost of assignments: 8

तल दिइएको लागत matrix प्रयोग गरी, optimal job assignment अनि cost of assignment हरूको लागत निर्णय गर।

		Job				
		P	Q	R	S	T
Mechanic	A	10	3	3	2	8
	B	9	7	8	2	7
	C	7	5	6	2	4
	D	3	5	8	2	4
	E	9	10	9	6	10

নিম্নলিখিত মূল্য ম্যাট্রিক্স (Cost matrix) ব্যবহার করে, অনুকূল কার্য অর্পিত (Optimal job assignment) এবং অর্পিত সমস্যার মূল্য নির্ধারণ করঃ

		কার্য				
		P	Q	R	S	T
শ্রমিক	A	10	3	3	2	8
	B	9	7	8	2	7
	C	7	5	6	2	4
	D	3	5	8	2	4
	E	9	10	9	6	10

14. Solve the following L.P.P. with the help of Two Phase method: 12

Two Phase पद्धति द्वारा तल दिइएको L.P.P. समाधान गर।

Minimize $Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3$

Subject to, $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

दुई फेज (Two Phase) पद्धतिर साहायो निम्नलिखित एल.पि.पि. (L.P.P.)-टि समाधान करः

सर्वनिम्न (Minimize) $Z = x_1 - 2x_2 - 3x_3$

-एर सापेक्षे (Subject to), $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$

$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$

15. An agriculture farm has 180 tons of Nitrogen fertilizers, 250 tons of phosphate and 220 tons of potash. It is able to sell 3:3:4 mixtures of these substances at a profit of Rs. 15 per ton and 1:2:1 mixtures at a profit of Rs. 12 per ton respectively. Pose a L.P.P. to show how many tons of these two mixtures should be prepared to obtain the maximum profit. Solve the problem by graphical method. 8+4

একটি কৃষি ফার্মে 180 টন নাইট্রোজেন সার, 250 টন ফসফেট এবং 220 টন পটাশ আছে। এই পদার্থগুলির 3:3:4 মিশ্রণকে 15 টাকা লাভে এবং 1:2:1 মিশ্রণকে 12 টাকা লাভে বিক্রয় করা যায়। এই দুই মিশ্রণের কত টন তৈরী করা উচিত যাতে লাভ সর্বোচ্চ হয়, এই মর্মে একটি এল.পি.পি. (L.P.P.) তৈরী কর। এই সমস্যাটি লেখচিত্রের মাধ্যমে সমাধান কর।

एउटा कृषि फार्ममा 180 टन् Nitrogen मल, 250 टन् phosphate अनि 220 टन् potash छ। यसले क्रमैसंगले 3:3:4 को पदार्थ मिश्रण लाई ₹15 प्रति टन् को नाफामा अनि 1:2:1 को पदार्थ मिश्रणलाई ₹12 प्रति टन्को नाफामा बेच्न् सक्छ। कति टन्को यस पदार्थको मिश्रण ज्यादा मापमा नाफा पाउनु को लागी बनाउन सक्छ भन्ने एउटा L.P.P. तयार गर। यस समस्यालाई ग्राफिक रूपमा समाधान गर।

16. Find the dual problem of the following L.P.P. and then solve the dual problem: 12

तल दिइएको L.P.P. को dual समस्या खोज अनि त्यस dual समस्यालाई समाधान गर।

Maximize $Z = x_1 + 6x_2$

Subject to, $x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 + 3x_2 \leq 3$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

निम्नलिखित एल.पि.पि. (L.P.P.) -एर द्वैत (Dual) समस्या बेर कर एवं द्वैत समस्याटि समाधान करः

सर्वाधिक (Maximize) $Z = x_1 + 6x_2$

-एर सापेक्षे (Subject to), $x_1 + x_2 \geq 2$

$x_1 + 3x_2 \leq 3$

$x_1,\ x_2 \geq 0$

DSE-2B

METRIC SPACES AND COMPLEX ANALYSIS

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

1. Show that $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ is nowhere differentiable in $\mathbb{C}$.

   দেখাও $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ অপেক্ষকটি জটিল তলে অবকলনযোগ্য নয়।

   $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ मा कतै पनि differentiable छैन भनी प्रमाण गर।

2. Let $X \neq \phi$ and $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ be defined by

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$$

   for $x, y \in X$. Prove that (X, d) is a metric space.

   ধরা যাক, $X \neq \phi$ এবং $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$-একটি অপেক্ষক, যেটি নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িতঃ

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{যখন } x = y \\ 1 & \text{যখন } x \neq y \end{cases}$$

   যেখানে $x, y \in X$ । প্রমাণ কর (X, d)-একটি metric space ।

   यदि $X \neq \phi$ अनि $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$

$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x = y \\ 1 & \text{if } x \neq y \end{cases}$ $x, y \in X$ ले परिभाषित भए (X, d) एउटा metric space हो भनी प्रमाण गर।

3. Show that $\lim\limits_{z \to 0}\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$ does not exist.

   দেখাও $\lim\limits_{z \to 0}\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$-এর কোনো অস্তিত্ব নেই।

   $\lim\limits_{z \to 0}\left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)$ exist गर्दैन भनी प्रमाण गर।

4. Show that the function $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, defined by $u(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + 2y + 1$ is Harmonic.

   দেখাও যে নিম্নলিখিত অপেক্ষকটি Harmonic-অপেক্ষকঃ

   $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, যেখানে $u(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + 2y + 1$

   $u(x, y) = -x^3 + 3xy^2 + 2y + 1$ ले परिभाषित फलन $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ Harmonic हो भनी प्रमाण गर।

5. Let (X, d) and (Y, ρ) be two metric spaces and $f : X \to Y$ be a continuous map, and $\{x_n\}$ be a convergent sequence in X. Is the sequence $\{f(x_n)\}$ convergent? — Justify.

ধরা যাক, (X, d) এবং (Y, ρ)-দুটো Metric space এবং $f : X \to Y$ একটি সন্তত অপেক্ষক, এবং $\{x_n\}$ একটি অভিমুখী অনুক্রম। এখন $\{f(x_n)\}$ অনুক্রমটি কী অভিমুখী হবে ? বিশ্লেষণ কর।

যদি (X, d), (Y, ρ) দুইবটা metric space হরু भए, अनि $f : X \to Y$ एउटा continuous map भए यनि $\{x_n\}$ X मा एउटा अभिकेन्द्रित (convergent) अनुक्रम भए। अनुक्रम $\{f(x_n)\}$ पनि अभिकेन्द्रित हो ? उत्तरलाई न्यायोचित (justify) गर।

6. Show that every differentiable function $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ is continuous.

দেখাও প্রতিটি অবকলনযোগ্য অপেক্ষক $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ সন্তত।

प्रत्येक differentiable फलन $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ continuous हो भनी प्रमाण गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

7. State and prove Cauchy-Riemann equations. 2+4

Cauchy-Riemann সমীকরণগুলো বর্ণনা কর এবং সেগুলো প্রমাণ কর।

Cauchy-Riemann समिकरणलाई उल्लेख अनि प्रमाण गर।

8. Let $f : D(\subseteq \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, and $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, and $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Then show that f is continuous at z_0 iff u and v are continuous at (x_0, y_0). 3+3

ধরা যাক, $f : D(\subseteq \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, এবং $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, এবং $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$। প্রমাণ কর f অপেক্ষকটি z_0 বিন্দুতে সন্তত হলে, u এবং v অপেক্ষকদ্বয়ও (x_0, y_0) বিন্দুতে সন্তত হবে, এবং প্রমাণ কর, যদি u এবং v অপেক্ষকদ্বয় (x_0, y_0) বিন্দুতে সন্তত হয়, তাহলে f অপেক্ষকটিও z_0 বিন্দুতে সন্তত হবে।

यदि $f : D(\subseteq \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ अनि $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ अनि $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$। z_0 मा f एउटा निरन्तर (continuous) हुन्छ यदि र मात्र यदि u अनि v निरन्तर हुन्छ (x_0, y_0) मा।

9. Let $u : D(\subseteq \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ be defined by $u(x, y) = x^2 + 2xy + 3$. 6

Can you construct an analytic function $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ such that $\mathrm{Re}(f) = u$, (where you can choose D suitably).

If the construction is not possible, then explain the reason.

ধরা যাক, $u : D(\subseteq \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ অপেক্ষকটি নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিতঃ

$$u(x, y) = x^2 + 2xy + 3.$$

এমন কোনো Analytic অপেক্ষক $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ -এর অস্তিত্ব দেখানো সম্ভব কী , যার জন্য $\mathrm{Re}(f) = u$ হবে ? (অঙ্কটি করার সময়, D উপযুক্তভাবে নিতে পারবে)। যদি এ ধরনের অপেক্ষকের অস্তিত্ব না থাকে, তাহলে যৌক্তিকতা বিচার করো।

যদি $u : D(\subseteq \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ লাই $u(x, y) = x^2 + 2xy + 3$ লে পরিভাষিত গরিए के तिमीले एउटा analytic फलन $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ निर्माण गर्न सक्छौ, जहाँ $\mathrm{Re}(f) = u$ हुन्छ ? (D लाई आफ्नो हिसाबले छान्नुहोस्)। यदि निर्माण नभएको खण्डमा त्यसको कारण बताउ।

10. Let $(\mathbb{R}^2, d)$ be a metric space, where d is the Euclidean metric on $\mathbb{R}^2$. Let $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^n$ be a sequence and $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Prove that $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ if and only if $x_n \to x_0$ and $y_n \to y_0$ in $\mathbb{R}$. 3+3

धरा याक, $(\mathbb{R}^2, d)$ हलो एकटि Euclidean metric Space एवं $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^n$ एकटि अनुक्रम, एवं $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ । प्रमाण कर $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ हले $x_n \to x_0$ एवं $y_n \to y_0$ । आरो, प्रमाण कर, यदि $x_n \to x_0$ एवं $y_n \to y_0$ हय, ताहले $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ ।

यदि $(\mathbb{R}^2, d)$ एउटा metric space भए जहाँ d $\mathbb{R}^2$ मा भएको Euclidean metric हो। यदि $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^n$ एउटा अनुक्रम भए अनि $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ भए, प्रमाण गर $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ यदि अनि यदि मात्र $x_n \to x_0$ अनि $y_n \to y_0$, $\mathbb{R}$ मा।

11. State and prove Cantor's theorem for a complete metric space. 2+4

एकटि Complete Metric Space-এর জন্য Cantor'-এর উপপাদ্যটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

Complete Metric Space को लागी Cantor's को उपपाद्य उल्लेख अनि प्रमाण गर।

12. Let (X, d) be a metric space and $A, B \subseteq X$. Show that 6

$$d(A \cup B) \leq d(A) + d(B) + \mathrm{dist}(A, B),$$

where $d(A)$ denotes the diameter of A and $\mathrm{dist}(A, B)$ denotes the distance between A and B.

ধরা যাক, (X, d) একটি Metric Space এবং $A, B \subseteq X$ ।

দেখাও $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B) + \mathrm{dist}(A, B)$, যেখানে $d(A)$ -এর অর্থ, A সেটের ব্যাস এবং $\mathrm{dist}(A, B)$ -এর অর্থ, A এবং B সেটদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব।

यदि (X, d) एउटा metric space भए अनि $A, B \subseteq X$ प्रमाण गर $d(A \cup B) \leq d(A) + d(B) + \mathrm{dist}(A, B)$, जहाँ $d(A)$ ले A को व्यास वोध् गर्छ अनि $\mathrm{dist}(A, B)$ ले A अनि B माझको दुरी बताउँछ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

13.(a) Let (X, d) be a metric space and $A \subseteq X$ be a compact set. Prove that A is closed and bounded. Is the converse part true? — Justify. 3+3+2

ধরা যাক, (X, d) একটি Metric Space এবং $A \subseteq X$ একটি Compact Set । প্রমাণ কর A সেটটি closed এবং bounded।

এই বাক্যটির বিপরীত বাক্যটি (Converse Part) কী সত্য ?

मानौ (X, d) एउटा metric space अनि $A \subseteq X$ एउटा compact set हो। A closed अनि bounded हो भनी प्रमाण गर। यसको उल्टो सत्य हो ? न्यायोचित गर।

(b) Show that every convergent sequence in a metric space (X, d) is Cauchy sequence. What is the converse part of the result? 3+1

কোন Metric Space এ, যে-কোন অভিমুখী অনুক্রম সর্বদাই Cauchy অনুক্রম হবে। এই বাক্যটির বিপরীত বাক্যটি (Converse part) কী সত্য হবে ?

Metric space (X, d) मा प्रत्येक अभिकेन्द्रित अनुक्रम Cauchy अनुक्रम हो भनी प्रमाण गर। यस परिणामको उल्टो के हुन्छ ?

14.(a) Evaluate: / निर्णय करः / मान निर्णय गरः 4

$$\int_{|z+4|=2} \frac{z\,dz}{(16-z^2)(z+i)}$$

(b) Justify: / यौक्तिकता विचार करः / न्यायोचित गरः $\mathrm{Re}\left[\int_\gamma f(z)\,dz\right] = \left[\int_\gamma \mathrm{Re}(f(z))\,dz\right]$ 3

(c) Prove that the argument function "arg", where arg: $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi, \pi]$ is not continuous. 3

प्रमाण करः Argument অপেক্ষকটি "arg: $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi, \pi]$" সন্তত না।

Argument फलन "arg" जहाँ arg: $\mathbb{C}\setminus\{0\} \to (-\pi, \pi]$ निरन्तर छैन भनी प्रमाण गर।

(d) Find the image of the point $z = \sqrt{3} - i$ on the Riemann sphere under the stereographic projection. 2

Riemann Sphere-এ Stereographic অভিক্ষেপ দ্বারা $z = \sqrt{3} - i$ বিন্দুটির প্রতিবিম্বটি কী হবে ?

Riemann sphere को stereographic projection मा बिन्दु $z = \sqrt{3} - i$ को image निर्णय गर।

15. Let $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, where D is open and connected, and f be analytic on D.

ধরা যাক $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ একটি অপেক্ষক, যেখানে D সেটটি Open এবং Connected, এবং f অপেক্ষকটি D সেটে Analytic ।

मानौ $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$, जहाँ D open अनि connected हो अनि f D मा analytic हो।

(a) If $\overline{f(z)}$ is analytic, then $f(z)$ is constant. — Justify. 4

যদি $\overline{f(z)}$ অপেক্ষকটি analytic হয়, তাহলে f অপেক্ষকটিও analytic হবে। যৌক্তিকতা বিচার কর।

यदि $\overline{f(z)}$ analytic हो भने $f(z)$ स्थिरांक constant हो। न्यायोचित गर।

(b) Evaluate: / মান নির্ণয় করঃ / मान निर्णय गरः 2

$$\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+1}$$

(c) Show that $\mathrm{Re}(f)$ is harmonic on D. 3

प्रमाण करः $\mathrm{Re}(f)$ একটি Harmonic অপেক্ষক।

$\mathrm{Re}(f)$ D मा harmonic छ भनी प्रमाण गर।

(d) Let $L = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Show that $f : D \to L$ is a constant function. 3

ধরা যাক, $L = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$. দেখাও $f : D \to L$ অপেক্ষকটি ধ্রুবক অপেক্ষক।

মানৌ $L = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$. $f : D \to L$ এউটা স্থিরাংক ফলন হো भनी प्रमाण गर।

16.(a) Show that the set of natural numbers is not complete with respect to the metric 4

$$d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|,$$

where m, n are natural numbers.

প্রমাণ কর স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটি $d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$ $m, n \in \mathbb{N}$ metric-এর সাপেক্ষে incomplete।

Metric $d(m, n) = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right|$ को सन्दर्भमा, प्राकृतिक संख्याको set complete छैन भनी प्रमाण गर, जहाँ m अनि n प्राकृतिक संख्याहरू हुन्।

(b) Show that $(\mathbb{R}, d)$ is a metric space, where d is defined by 4

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| , & \text{if } xy \le 0 \\ |x| + |y| , & \text{otherwise} \end{cases}$$

প্রমাণ কর $(\mathbb{R}, d)$ একটি Metric Space, যেখানে d-মেট্রিকটি নিম্নলিখিতভাবে বর্ণিতঃ

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| , & \text{যখন } xy \le 0 \\ |x| + |y| , & \text{যখন } xy > 0 \end{cases}$$

$(\mathbb{R}, d)$ एउटा metric space हो भनी प्रमाण गर जहाँ d लाई $d(x, y) = \begin{cases} |x - y| , & \text{if } xy \le 0 \\ |x| + |y| , & \text{otherwise} \end{cases}$ ले परिभाषित गरिएको छ।

(c) In a metric space, show that arbitrary union of open sets is open. 2

প্রমাণ কর যে-কোন Metric Space-এ যদৃচ্ছ (arbitrary) open-সেটের union open-সেট হবে।

कुनै metric space मा, open set हरूको (arbitrary) संघ open छ भनी प्रमाण गर।

(d) In a metric space, countable intersection of open sets may not be open. — Explain. 2

যে-কোন Metric Space-এ countable সংখ্যক open সেটের intersection করলে open সেট নাও হতে পারে। বিশ্লেষণ কর।

कुनै metric space मा, open set हरूको गणनायोग्य (countable) प्रतिच्छेदन् open नहुन पनि सक्छ। व्याख्या गर।

——×——

'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 6th Semester Examination, 2022

DSE-P3-MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains DSE3A and DSE3B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

DSE3A

POINT SET TOPOLOGY

GROUP-A

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

1. Give an example of a continuous bijective map between two spaces which is not a homeomorphism. Justify your answer. 3

2. If $F(\mathbb{N})$ denotes the collection of all finite subsets of $\mathbb{N}$ then find cardinality of $F(\mathbb{N})$. 3

3. The co-countable topology on $\mathbb{R}$ is defined as the collection of all sets $U \subset \mathbb{R}$ so that $\mathbb{R}\backslash U$ is either countable or all of $\mathbb{R}$. Is [0, 1] a compact subspace of $\mathbb{R}$ with co-countable topology. 3

4. Show that $\overline{\overline{A}}^{0} = \overline{A}^{0}$ and $\overline{A^c}^{0} = \overline{A}^{c}$, where A^c means complement of A. 3

5. Let us consider $\mathbb{R}$ with cofinite topology. Find closure of A and B where A is finite and B is infinite. 3

6. Examine if every constant function $f : (X, J_1) \to (Y, J_2)$ is continuous. 3

GROUP-B

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

7. Prove that $2^a = c$, where $|\mathbb{N}| = a$ and $|\mathbb{R}| = c$. 6

8. Let $f : (X, J_X) \to (Y, J_Y)$ be a mapping then prove that the following are equivalent: 6

   (i) f is continuous.

(ii) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}, \forall A \subset X$

(iii) for any closed set C in Y, $f^{-1}(C)$ is closed in X.

9. Show that $\mathbb{R}$ with usual topology is not compact but $\mathbb{R}$ with cofinite topology is compact. 6

10. Let X and Y be connected spaces. Show that $X \times Y$ is connected. 6

11. Show that $\{(r, s);\ r < s,\ r, s \in Q\}$ is a basis for usual topology on $\mathbb{R}$ but $\{[r, s);\ r < s,\ r, s \in Q\}$ is not a basis for $\mathbb{R}_\ell$. 6

12.(a) Can we say that metric spaces are topological spaces? — Explain. 2

(b) Show that projection maps are continuous open but not closed. 4

GROUP-C

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

13.(a) Let X be a compact Hausdorff space and let (A_n) be a countable collection of closed sets in X. Show that if each set A_n has empty interior in X, then the union $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ also has empty interior in X. 7

(b) Prove that continuous image of a connected space is connected. 5

14.(a) Show that the function $f : \mathbb{R}_\ell \longrightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = [x]\ \forall x \in \mathbb{R}$ is continuous. 6

(b) Show that $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$ cannot be homeomorphism if $m \neq n$. 6

15.(a) By giving examples show that $a + c = c$, where $|\mathbb{N}| = a$ and $|\mathbb{R}| = c$. 5

(b) Show that closed subset of a compact space is compact but a compact subset of a topological space may not be closed. 5+2

16.(a) Show by an example that connectedness is necessary in the statement of intermediate value theorem. 3

(b) Let A be a subset of a topological space X and (x_n) be a sequence in A such that $x_n \to x$. Show that $x \in \overline{A}$. Also show that if X is a metric space then the converse is true. 4+5

DSE3B

BOOLEAN ALGEBRA AND AUTOMATA THEORY

GROUP-A

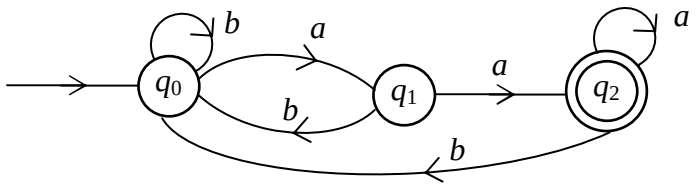
Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

1. Give an example of a bijective mapping between two ordered sets which is not an order isomorphism.

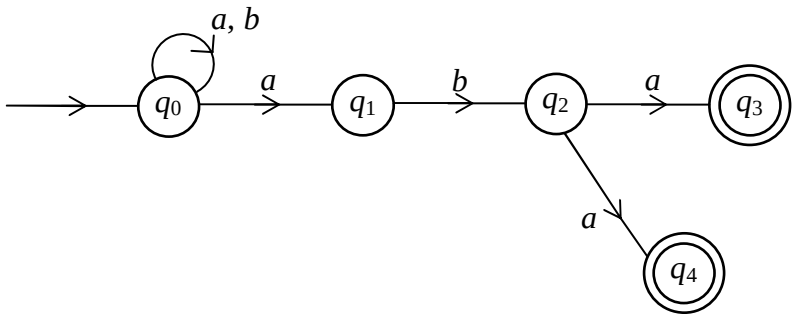
2. Show by an example that union of two sublattices of a lattice may not be a sublattice.

3. Reduce the Boolean term $((x_1 + x_2).(x_1' + x_3))'$ to DNF.

4. Identify the language $L(M)$ accepted by the automaton M in the figure:



5. Let M be the NFA whose state diagram is given below:



Write down the transition table for this NFA. Also find $L(M)$.

6. Let $\sum = \{0, 1\}$ and $T = \{\omega \in \sum^* : \omega \text{ contains even number of 1's}\}$. Show that T is an accepted language.

GROUP-B

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

7. (a) Let L and K be two lattices and $f : L \to K$ be a map. Prove that f is a lattice isomorphism iff it is order isomorphism. 4

   (b) Prove that every sublattice of a distributive lattice is also distributive. 2

8. (a) Let L be a Boolean lattice. Then prove that for all $a, b \in L$, $a \wedge b' = 0$ iff $a \le b$. 3

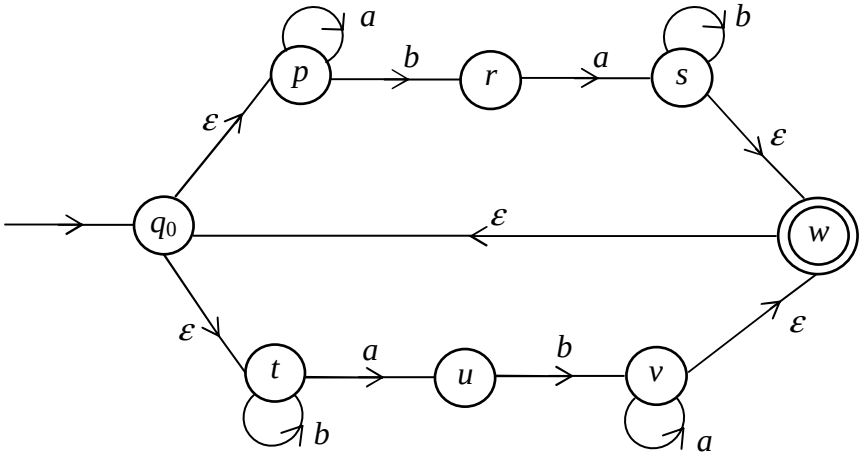
   (b) Let X be any set. Define $FC(X) = \{A \subseteq X : A \text{ is finite OR } X \setminus A \text{ is finite}\}$. Prove that $(FC(X), \cup, \cap, ', \phi, X)$ is a Boolean Algebra. 3

9. Suppose a 4-variable Boolean term is given as follows: 6

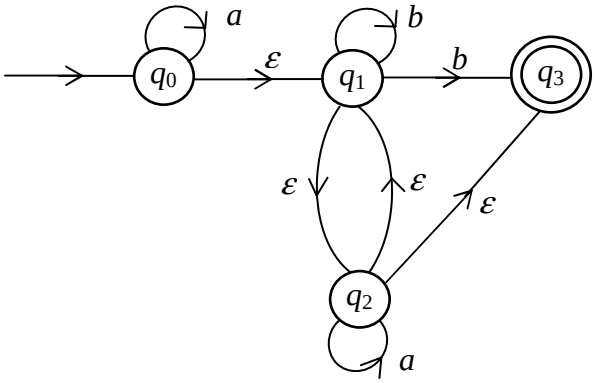
   $$\phi = \sum m(0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 13,\ 15)$$

   Minimize ϕ using Karnaugh map.

10.(a) For the given ε-NFA, compute $\hat{\delta}(q_0, aba)$ and $\hat{\delta}(q_0, bba)$. 3



(b) Find epsilon closures of all the states of the given ε-NFA. 3



11. For $\sum = \{a, b, c\}$, design a Turing machine that accepts $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$. 6

12.(a) Show that the language of palindromes over $\sum = \{a, b\}$ is a context free language. 4

(b) Distinguish between NFA and ε-NFA. 2

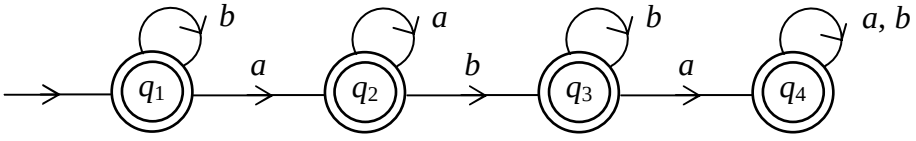
GROUP-C

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

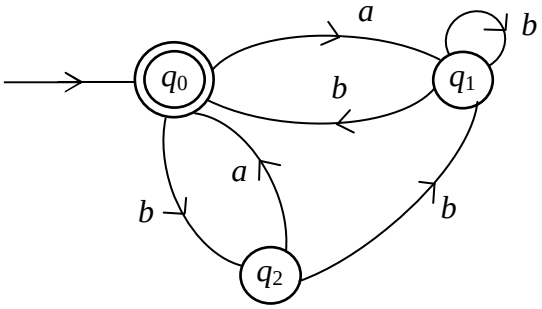
13.(a) Prove that a language L is accepted by some DFA iff L is accepted by some NFA. 6

(b) Find regular expression for the following DFAs: 3+3

(i)



(ii)



14.(a) Draw the transition graph of the NPDA, $M = (Q, \sum, \Gamma, \delta, q_0, z, F)$, where $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\sum = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, z\}$, $F = \{q_2\}$ and δ is given by: 6

$\delta(q_0, a, z) = \{(q_1, a), (q_2, \lambda)\}$

$\delta(q_1, b, a) = \{(q_1, b)\}$

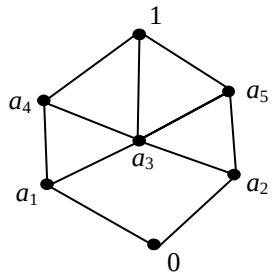
$\delta(q_1, b, b) = \{(q_1, b)\}$

$\delta(q_1, a, b) = \{(q_2, \lambda)\}$

(b) Let $\sum = \{a, b\}$ be an alphabet. Show that the language $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$ is not a regular language but it is a CFL. 6

15.(a) Prove that a lattice L is non-distributive iff $N_5 \rightarrowtail L$ OR $M_3 \rightarrowtail L$. Here $L_1 \rightarrowtail L_2$ means L_2 contains a sublattice isomorphic to L_1. 8

(b) Consider the lattice L given below: 4



Which of the following are sublattices of L?

$L_1 = \{0, a_1, a_2, 1\}$, $L_2 = \{0, a_1, a_5, 1\}$

Justify your answer.

16.(a) Draw a switching circuit which realizes the following Boolean expressions: 3+3

(i) $x(yz + y'z') + x'(yz' + y'z)$

(ii) $(x + y + z + u)(x + y + u)(x + z)$

(b) For $n \in \mathbb{N}$, suppose D_n denotes the set of all positive divisors of n. Then prove that $(D_n, \preccurlyeq)$ is a Boolean lattice iff n is square free. Here, $a \preccurlyeq b$ iff $a \mid b$. Here for $a \in D_n$, $a' = \frac{n}{a}$. 6

——×——

'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 6th Semester Examination, 2022

DSE-P4-MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains DSE4A and DSE4B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

DSE4A

DIFFERENTIAL GEOMETRY

GROUP-A

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

1. For the curve $\bar{r} = (3u,\ 3u^2,\ 2u^3)$, show that radius of curvature $R = \frac{3}{2}(1+2u^2)^2$.

2. Find the equation to the developable surface which has the helix $x = a\cos u$, $y = a\sin u,\ z = cu$ for its edge of regression.

3. Find the length of the curve given as the intersection of the surfaces
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad x = a\cosh(z/a)$$
from the point $(a,\ 0,\ 0)$ to $(x,\ y,\ z)$.

4. Prove that the geodesic curvature vector of a curve is orthogonal to the given curve.

5. If the n^{th} derivative of $\vec{r}$ with respect to s is given by $\vec{r}^{(n)} = a_n\vec{t} + b_n\vec{n} + c_n\vec{b}$, prove that $b_{n+1} = b_n' + ka_n - \tau c_n$.

6. Prove that the curve given by $x = a\sin^2 u,\ y = a\sin u\cos u,\ z = a\cos u$ lies on a sphere.

GROUP-B

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

7. Show that a curve is a helix if and only if the curvature and torsion of that curve are in constant ratio. 6

8. If the tangent and binormal at any point on a curve make angles θ and ϕ respectively with a fixed direction, then prove that $\frac{\sin\theta}{\sin\phi}\cdot\frac{d\theta}{d\phi}=-\frac{k}{\tau}$. 6

9. (a) Prove that the asymptotic lines are orthogonal iff the surface is minimal. 3

(b) Show that the parametric curve on a surface $r(u, v)=(u\cos v, u\sin v, v)$ are asymptotic line. 3

10. Find the parametric direction and angle between parametric curves. 3+3

11.(a) Find the equation of the tangent plane and normal to the surface $xyz=4$ at the point (1, 2, 2). 3

(b) Prove that the surface $xy=(z-c)^2$ is developable. 3

12.(a) Define first fundamental form. 1

(b) Show that, if θ is the angle at the point (u, v) between the two directions given by $P\,du^2+2Q\,du\,dv+R\,dv^2=0$; then $\tan\theta=\frac{2H(Q^2-PR)^{1/2}}{ER-2FQ+GP}$. 5

GROUP-C

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

13. Prove that for any curve: 2+2+2+2+2+2

(i) $\bar{r}'\cdot\bar{r}''=0$

(ii) $\bar{r}'\cdot\bar{r}=-\kappa^2$

(iii) $\bar{r}''\cdot\bar{r}'''=\kappa\kappa'$

(iv) $\bar{r}\cdot\bar{r}'^{v}=-3\kappa\kappa'$

(v) $\bar{r}''\cdot\bar{r}'^{v}=\kappa(\kappa''-\kappa^3-\kappa\tau^2)$

(vi) $\bar{r}'''\cdot\bar{r}'^{v}=\kappa'\kappa''+2\kappa^3\kappa'+\kappa^2\tau\tau'+\kappa\kappa'\tau^2$

14.(a) State and prove Serret-Frenet formulae. 6

(b) Find the arc-length parametrization for each of the following curves: 3+3

$\vec{r}(t)=4\cos t\,\hat{i}+4\sin t\,\hat{j}$, $t\geq 0$ and $\vec{r}(t)=(t+3,\ 2t-4,\ 2t)$, $t\geq 3$

15.(a) Show that the parametric curves are orthogonal on the surface 6

$r=(u\cos v,\ u\sin v,\ a\log\{u+\sqrt{u^2-\alpha^2}\})$

(b) Find the Principal direction and Principal curvature on a point of the surface 6

$x=a(u+v)$, $y=b(u-v)$, $z=uv$

16.(a) Find the involute and evolute of a circular helix. 3+3

(b) Show that the curves $u+v=$ constant are geodesic on a surface with the metric 6

$$(1+u^2)\,du^2-2uv\,dudv+(1+v^2)\,dv^2$$

DSE4B

THEORY OF EQUATIONS

GROUP-A

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

1. Apply Descartes' rule of signs to find the nature of the roots of the equation $x^4+x^2+x-1=0$. 3

2. If α, β, γ be the roots of the equation $x^3+3x^2-x+3=0$, find the value of $\sum\frac{1}{\alpha}$. 3

3. Express the polynomial $8x^3+2x+2$ as a polynomial in $2x-1$. 3

4. Find the remainder when $x^{10}+x^7+x^4+x^3+1$ is divided by x^2+1. 3

5. Form a cubic equation with real coefficients whose two of the roots are 1 and $-1-i$. 3

6. If α, β, γ be the roots of the equation $x^3+x-2=0$, then find the equation whose roots are $\alpha+3,\ \beta+3,\ \gamma+3$. 3

GROUP-B

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

7. Find the range of values of *k* for which the equation $x^4-26x^2+48x-k=0$ has four unequal roots. 6

8. Calculate Sturm's function and locate the position of real roots of the equation $x^4-x^2-2x-5=0$. 6

9. If α, β are the roots of the equation $t^2+2t+4=0$ and *m* is a positive integer, then prove that $\alpha^m+\beta^m=2^{m+1}\cos\frac{2m\pi}{3}$. 6

10.(a) Prove that the equation $(x+1)^4=a(x^4+1)$ is a reciprocal equation if $a\neq 1$ and solve it if $a=-2$. 4

(b) If $x^3+3px+q$ has a factor of the form $(x-\alpha)^2$, show that $q^2+4p^3=0$. 2

11. If $\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=3$ and $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=7$, find the value of $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$. 6

12.(a) Solve: $x^3-18x-35=0$ 4

(b) If α is an imaginary root of the equation $x^{11}-1=0$, prove that $(\alpha+2)(\alpha^2+2)\ldots\ldots(\alpha^{10}+2)=\frac{2^{11}+1}{3}$. 2

GROUP-C

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

13.(a) Solve the equation $x^4+12x^3-18x^2+6x+9=0$, given that the ratio of two roots is equal to the ratio of other two roots. 6

(b) Solve by Ferrari's method: $x^4-4x^3+5x+2=0$ 6

14.(a) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$, find the equation whose roots are $\alpha\beta+\beta\gamma,\ \beta\gamma+\gamma\alpha,\ \gamma\alpha+\alpha\beta$. 6

(b) State Fundamental Theorem of classical algebra. If α is a root of the equation $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}+\frac{4}{x-4}=x-5$, prove that α is a non-zero real number. 2+4

15.(a) Find the limits of the negative roots of the equation 6

$$30x^4+41x^3-136x^2+31x+12=0$$

(b) Express the polynomial $x^4+3x^3+5x^2+3x+1$ as a polynomial in $(x-3)$ and $(x+2)$. 6

16.(a) Find the relation among the coefficients of the equation $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ if its roots α, β, γ and δ be connected by the relation $\alpha+\beta=\gamma+\delta$. 6

(b) Solve: $3x^6+x^5-27x^4+27x^2-x-3=0$ 6

——×——

'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 6th Semester Examination, 2022

SEC2-P2-MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains SEC4A and SEC4B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* Courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

SEC4A

BOOLEAN ALGEBRA AND AUTOMATA THEORY

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

1. Define an order isomorphism between two ordered sets. Give an example.

   দুটি ক্রম সেটের (Ordered sets) মধ্যবর্তী একটি ক্রম isomorphism বলতে কি বোঝ ? একটি উদাহরণ দাও।

   दुई ordered sets मध्ये को order isomorphism को परिभाषा देऊ। उदाहरण देऊ।

2. Define a complete lattice. Give an example.

   Complete lattice বলতে কি বোঝ ? একটি উদাহরণ দাও।

   Complete lattice को उदाहरण सहित परिभाषा लेख।

3. Define a distributive lattice. Give examples of a distributive lattice and a non-distributive lattice.

   Distributive lattice-এর সংজ্ঞা দাও। একটি distributive lattice এবং একটি non-distributive lattice-এর উদাহরণ দাও।

   Distributive lattice को परिभाषा लेख। Distributive lattice अनि non- distributive lattice को उदाहरणहरू देऊ।

4. Define Boolean algebra and give two examples of Boolean algebra.
বুলিয়ান বীজগণিতের সংজ্ঞা দাও এবং দুটি বুলিয়ান বীজগণিতের উদাহরণ দাও।
Boolean बीजगणितको दुईवटा उदाहरण सहित परिभाषा लेख।

5. Let $\varepsilon = \{0, 1\}$, $A = \{0, 01\}$, $B = \{\varepsilon, 1, 110\}$. Find AB and BA.
ধর $\varepsilon = \{0, 1\}$, $A = \{0, 01\}$, $B = \{\varepsilon, 1, 110\}$. তাহলে AB এবং BA নির্ণয় কর।
मानौ $\varepsilon = \{0, 1\}$, $A = \{0, 01\}$, $B = \{\varepsilon, 1, 110\}$ AB अनि BA को मान निर्णय गर।

6. Define DFA and NFA.
DFA এবং NFA-এর সংজ্ঞা দাও।
DFA अनि NFA को परिभाषा लेख।

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

7. (a) Define dual of an ordered set and state the duality principle. Give an example of a dual statement. 3
ক্রম সেটের dual বলতে কি বোঝ ? Duality principle-টি উল্লেখ কর। একটি dual বিবৃতির উদাহরণ দাও।
Dual of an ordered set को परिभाषा लेख अनि duality principle उल्लेख गर। Dual statement को उदाहरण देऊ।

(b) Prove that $(P(X), \subseteq)$ is a bounded lattice where X is any non-empty set. 3
X খালি নয় এমন একটি সেটের ক্ষেত্রে প্রমাণ কর $(P(X), \subseteq)$ একটি Bounded lattice।
$(P(X), \subseteq)$ एउटा bounded lattice हो भनेर प्रमाण गर, जहाँ X एउटा non empty set हो।

8. (a) Define a sublattice of a lattice. Give an example of a sublattice of the lattice $L = \{m \in \mathbb{N} : m \mid 30\}$. Here the order in L is defined by $a \preccurlyeq b$ iff $a \mid b$. 3
কোন একটি lattice-এর sublattice বলতে কি বোঝ ?
$L = \{m \in \mathbb{N} : m \mid 30\}$ lattice-টির একটি sublattice-এর উদাহরণ দাও, যেখানে L-এ ক্রমটি (order) সংজ্ঞায়িত আছে $a \preccurlyeq b$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a \mid b$।
Lattice को उप lattice को परिभाषा देऊ। Lattice $L = \{m \in \mathbb{N} : m \mid 30\}$ को sublattice को उदाहरण देऊ। यहाँ L को order मा $a \preccurlyeq b$ यदि अनि यदि मात्र $a \mid b$ भनेर परिभाषित गरिएको छ।

(b) Prove that any chain in a lattice is a sublattice. 3
প্রমাণ কর Lattice-এর ভেতর যে কোন শৃঙ্খল (chain) একটি sublattice হয়।
Lattice को कुनै chain उप lattice हो भनी प्रमाण गर।

9. (a) Prove that every sublattice of a distributive lattice is also distributive. 3

প্রমাণ কর কোন একটি Distributive lattice-এর sublattice-গুলি distributive হয়।

Distributive lattice को प्रत्येक lattice पनि distributive छ भनी प्रमाण गर।

(b) Prove that every homomorphic image of a modular lattice is also a modular lattice. 3

দেখাও যে-কোন একটি Modular lattice-এর homomorphic বিম্ব (image)-টি একটি modular lattice ।

Modular lattice को प्रत्येक homomorphic image पनि modular lattice हो भनी प्रमाण गर।

10. Let D_{30} denote the set of all positive divisors of 30. Then prove that $(D_{30}, \leqslant)$ is a Boolean lattice where for any $a, b \in D_{30}$, $a \leqslant b$ iff $a \mid b$. Here a' (complement of a) is defined by $a' = \frac{30}{a}$. 6

ধর D_{30}, 30-এর সকল ধনাত্মক বিভাজ্য সংখ্যার সেট। প্রমাণ কর $(D_{30}, \leqslant)$ একটি বুলিয়ান lattice যেখানে $a \leqslant b$ যদি এবং কেবলমাত্র যদি $a \mid b$, $a, b \in D_{30}$ এছাড়াও a' (a-এর পরিপূরক) $a' = \frac{30}{a}$ ।

भानौ D_{30}, 30 को सबै सकारात्मक विभाजक को set हो। $(D_{30}, \leqslant)$ एउटा बुलीय lattice हो भनेर प्रमाण गर, जहाँ कुनै $a, b \in D_{30}$ मा $a \leqslant b$ यदि अनि यदि मात्र $a \mid b$. यहाँ a'(a को complement) लार्ड $a' = \frac{30}{a}$ ले परिभाषित गर्छ।

11. Design a DFA that accepts the following language: 6

$$L = \{x \in \{a, b\}^* : x \text{ begins with } aa \text{ and ends with } bb\}$$

একটি DFA নক্সা কর যা নিম্নলিখিত ভাষাকে গ্রহণ করেঃ

$L = \{x \in \{a, b\}^* : x,\ aa$ দ্বারা শুরু এবং bb দ্বারা শেষ হবে$\}$।

एउटा DFA design गर जसले तल दिइएको भाषा लाई स्वीकार गर्छः $L = \{x \in \{a, b\}^* :$ x aa मा शुरु हुन्छ अनि bb मा अन्त हुन्छ ?

12.(a) Write a regular expression for the language $L = \{a^n b^m : m + n$ is even$\}$. 3

$L = \{a^n b^m : m + n$ একটি জোড় সংখ্যা$\}$ ভাষাটিকে regular রাশিমালা (expression) রূপে উল্লেখ কর।

भाषा $L = \{a^n b^m : m + n$ एउटा सम (even) संख्या हो$\}$ को लागी एउटा regular expression लेख।

(b) Give English description of the language $b(a^* b)^* a^*$. 3

$b(a^* b)^* a^*$ ভাষাটির ইংরেজিতে বর্ণনাটি উল্লেখ কর।

भाषा $b(a^* b)^* a^*$ लाई अंग्रेजी विवरण देऊ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

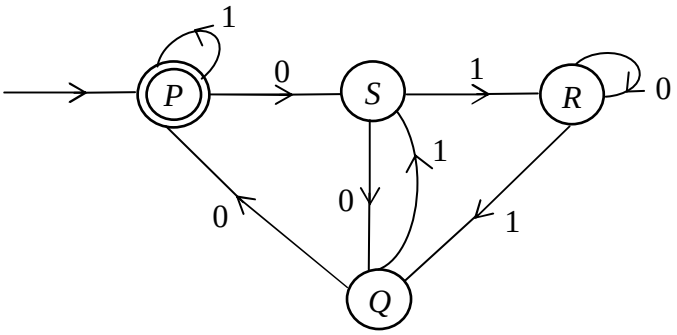
নিম্নলিখিত যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

13.(a) Convert the following DFA to regular expression: 6

নিম্নলিখিত DFA-কে regular রাশিমালায় রূপান্তর করঃ

दिइएको DFA लार्ड regular expression मा परिणत गर।



(b) Prove that for any two languages L_1 and L_2, $L_1 \cup L_2$ and $L_1 \cap L_2$ are also languages. 6

যে-কোন দুটি ভাষা L_1 এবং L_2 -এর জন্য প্রমাণ কর, $L_1 \cup L_2$ এবং $L_1 \cap L_2$ পুনরায় ভাষা হয়।

कुनै दुई भाषाहरू L_1 and L_2 मा, $L_1 \cup L_2$ अनि $L_1 \cap L_2$ पनि भाषाहरू हुन् भनी प्रमाण गर।

14.(a) Let M be an NFA whose state diagram is given below: 6

(i) Write down the transition table for this NFA.

(ii) What are the final states?

(iii) Find $L(M)$.

ধর M একটি NFA যার অবস্থান নক্সাটি (state diagram) নিম্নে বর্ণিতঃ

(i) NFA-এর ক্ষেত্রে transition table-টি উল্লেখ কর।

(ii) সর্বশেষ অবস্থাগুলি কি কি ?

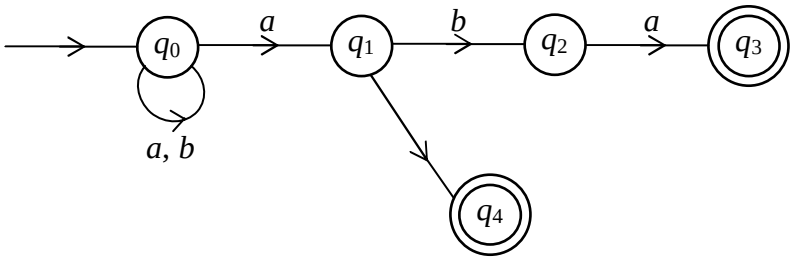
(iii) $L(M)$ -এর মান নির্ণয় কর।

भानौ M एउटा NFA भए, जसको चित्रण तल दिइएको छ

(i) यस NFA को लागी transition table लेख।

(ii) अन्तिम states के के हुन् ?

(iii) $L(M)$ खोज।



(b) Draw the truth table for the Boolean expression $x_1' + x_2 \cdot x_3$ and then reduce it to its DNF. 3+3

$x_1' + x_2 \cdot x_3$ বুলিয়ান রাশিমালায় Truth table টি অঙ্কন কর এবং সেটিকে কমিয়ে DNF আকারে লেখ।

বুলীয় expression $x_1' + x_2 \cdot x_3$ की Truth table चित्रण गर अनि यसलाई DNF मा परिणत गर।

15.(a) Suppose a Boolean term in 3-variable is given by: $f = \sum m(3, 6, 7)$. Minimize f using Karnaugh map. 6

ধর 3 টি চলরাশিসহ কোন একটি বুলিয়ান পদ $f = \sum m(3, 6, 7)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। Karnaugh নকশা (map) ব্যবহার করে f-কে ছোট আকারে প্রকাশ কর।

भानौ एउटा बुलीय term 3-variables मा यसरी दिइएको छः $f = \sum m(3, 6, 7)$. Karnaugh map प्रयोग गरी यसलाई घटाउ।

(b) Draw the switching circuit which realizes the Boolean expression $xyz' + x'(yz' + y'z)$. 3

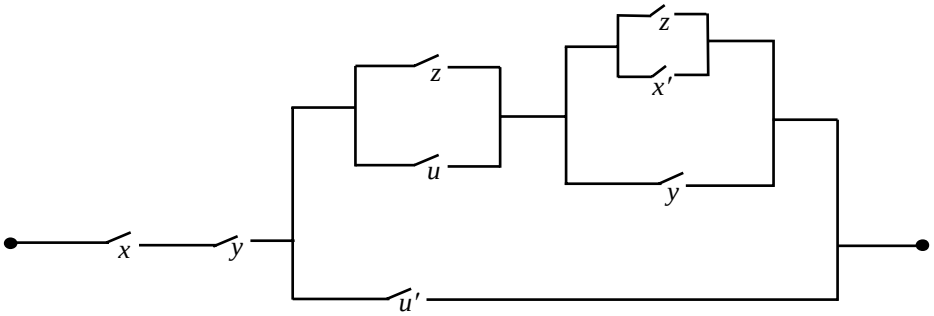
$xyz' + x'(yz' + y'z)$ বুলিয়ান রাশিমালাটির উপযুক্ত সুইচিং বর্তনী (Switching circuit)-টি অঙ্কন কর।

बुलीय expression $xyz' + x'(yz' + y'z)$ संग मिलते एउटा switching circuit चित्रण गर।

(c) Find the Boolean expression that represents the circuit shown below: 3

নিম্নলিখিত বর্তনীটিকে প্রকাশ করে এমন বুলিয়ান রাশিমালাটি নির্ণয় করঃ

दिइएको circuit लाई represent गर्ने बुलीय expression खोज् गर।



16.(a) Suppose a room has three entrances and at each entrance there is a switch to independently control the light in the room in such a way that flicking any one of the switches changes the state of the light (on to off and off to on). Design a switching circuit to accomplish this. 6

ধর কোন একটি কক্ষে তিনটি প্রবেশপথ আছে এবং প্রতিটি প্রবেশপথে রুমের আলোকে স্বাধীনভাবে নিয়ন্ত্রণ করে এমন একটি করে সুইচ আছে, যাদের কোন একটিকে ক্লিক করলে আলোর অবস্থা পরিবর্তন হয় (চালু থেকে বন্ধ এবং বন্ধ থেকে চালু) এটি সম্পন্ন করার জন্য একটি সুইচিং সার্কিট ডিজাইন কর।

भानौ एउटा कोठाको ३ वटा प्रवेश द्वार छ अनि प्रत्येक द्वारमा एउटा switch छ जसले स्वतन्त्र रूपमा कोठाको बत्तीलाई नियन्त्रण गर्छ। यस्तो तरिकाले जसमा कुनै एउटा switch दबाउँदा, त्यहाँको बत्तीको अवस्था परिवर्तन गर्छ (on देखि off अनि off देखि on) यस अवस्थाको अनुरूप एउटा switching circuit design गर।

(b) Prove that a lattice is non-modular iff it contains a sublattice isomorphic to N_5. (N_5 is the pentagon). 6

প্রমাণ কর একটি lattice, non-modular হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি lattice-টিতে একটি sublattice থাকবে যা N_5-এর সাথে isomorphic। (N_5 হল পঞ্চভুজ)।

एउटा lattice, non-modular हो यदि अनि यदि मात्र यसले sublattice, N_5 संग isomorphic भएको समावेश गर्छ भनी प्रमाण गर। (N_5 एउटा पेन्टागन हो).

SEC4B

GRAPH THEORY

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

1. Define complete graph and complete bipartite graph with examples. 3

উদাহরণসহ সম্পূর্ণ গ্রাফ (Complete graph) এবং সম্পূর্ণ দ্বিপক্ষীয় গ্রাফ (Complete bipartite graph) সংজ্ঞায়িত কর।

Complete graph अनि Complete bipartite graph को उदाहरण सहित परिभाषा देऊ।

2. Examine the following statement is true or false: 3

"There exists a simple graph on 10 vertices and with 20 edges and 5 components."

নীচের বিবৃতিটি সত্য না মিথ্যা পরীক্ষা করঃ "10 টি শার্ষবিন্দু, 20 টি বাহু এবং 5 টি উপাংশ যুক্ত (component) একটি সাধারণ গ্রাফ-এর অস্তিত্ব আছে।"

तल दिइएको कथन सत्य हो होइन जाँच गर। 20 edge संगै 10 vertices अनि 5 वटा component भएको साधारण graph हामी पाउँछ।

3. Prove that every tree is a bipartite graph. 3

প্রমাণ কর যে প্রতিটি ট্রি (Tree) দ্বিপক্ষীয় গ্রাফ (Bipartite Graph) হবে।

प्रत्येक tree एउटा bipartite graph हो भनी प्रमाण गर।

4. Does there exist a simple graph with five vertices having degrees 2, 2, 4, 4, 4? — Justify. 3

2, 2, 4, 4, 4 ডিগ্রী (degree) বিশিষ্ট 5 টি শীর্ষবিন্দুসহ একটি সাধারণ গ্রাফ (Simple Graph)-এর অস্তিত্ব আছে কি ?

2, 2, 4, 4, 4 degrees भएको 5 vertices वाला साधारण graph हामी पाउँछौ ? न्यायोचित गर।

5. Prove that, a connected graph G with $n \geq 2$ vertices is a tree iff the sum of the degrees of the vertices is $2(n-1)$. 3

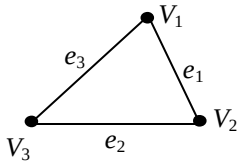
প্রমাণ কর যে n - শীর্ষবিন্দুসহ একটি সংযুক্ত গ্রাফ (Connected Graph) G একটি ট্রি (Tree) হবে যদি এবং কেবল যদি (if and only if) শীর্ষবিন্দুগুলির ডিগ্রীর সমষ্টি হল $2(n-1)$।

$n \geq 2$ vertices भएको एउटा connected graph, tree हो यदि अनि यदि मात्र vertices को degree हरूको योगफल $2(n-1)$ हो भनी प्रमाण गर।

6. State the following graph is bipartite or not. Justify your answer. 3

নীচের গ্রাফটি দ্বিপক্ষীয় নাকি নয় ? তোমার মত যাচাই কর।

तल दिइएको graph bipartite हो होइन न्यायोचित गर।



GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

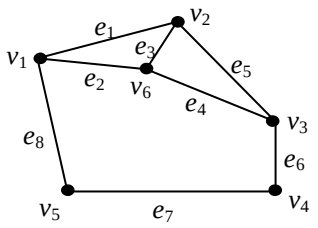
নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर देऊ

7. (a) Define Hamiltonian cycle and also show that the following graph is a Hamiltonian graph. 3

'Hamiltonian cycle'-এর সংজ্ঞা দাও এবং এছাড়া দেখাও যে নিম্নলিখিত গ্রাফ টি একটি 'Hamiltonian graph' হচ্ছে।

Hamiltonian cycle को परिभाषा लेख अनि दिइएको graph Hamiltonian graph हो भनी प्रमाण गर।



(b) Let G be a simple connected graph with 10 vertices and 9 edges. Does G contain a vertex of degree 1? Justify your answer. 3

ধরা যাক G হল 10 টি শীর্ষবিন্দু এবং 9 টি বাহু বিশিষ্ট এর সরল সংযুক্ত গ্রাফ। গ্রাফ G-তে কি এক ডিগ্রী বিশিষ্ট একটি শীর্ষবিন্দু রয়েছে ? তোমার মত যাচাই কর।

भानौ G, 10 vertices अनि 9 edges भएको एउटा साधारण connected graph हो/के G ले 1 degree भएको vertex समावेश गर्छ ? न्यायोचित गर।

8. Prove that a graph is bipartite if and only if it does not contain any cycle of odd length. 6

প্রমাণ কর যে একটি গ্রাফ দ্বিপক্ষীয় গ্রাফ (bipartite) হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি (if and only if) এতে বিজোড় দৈর্ঘ্যের কোনো চক্র (cycle) না থাকে।

एउटा graph bipartite हो यदि अनि यदि मात्र यसले odd लम्बाइ भएको cycle समावेश गर्छ भनी प्रमाण गर।

9. (a) Show that a connected graph with one or two vertices each of which has even degree, has an Euler circuit. 3

দেখাও যে এক বা দুটি শীর্ষবিন্দুসহ একটি সংযুক্ত গ্রাফ (Connected Graph) যার প্রতিটি শীর্ষবিন্দু-এর জোড় ডিগ্রী (even degree) রয়েছে, সেখানে একটি 'Euler circuit' থাকবে।

एउटा connected graph मा even degree भएको एक अथवा दुई शिर्षहरू (vertices) छ भने यसमा Euler circuit पनि छ भनेर प्रमाण गर।

(b) What is the number of edges in k_n, $n \geq 2$? How many vertices are there in a graph with 20 edges if each vertex is of degree 4? 3

'k_n'-এর মোট বাহু সংখ্যা নির্ণয় কর যেখানে $n \geq 2$। একটি গ্রাফ যেখানে 20 টি বাহু রয়েছে এবং প্রতিটি শীর্ষবিন্দু-এর ডিগ্রী (degree) 4 হলে, এই গ্রাফ-এর শীর্ষবিন্দু নির্ণয় কর।

k_n, $n \geq 2$ मा कतिवटा किनाराहरू (edges) छ ? 20 किनाराहरू भएको एउटा graph मा प्रत्येक शिर्षहरूको degree 4 भए, कति वटा शिर्षहरू छन् ?

10.(a) Give an example of a graph which is Eulerian but not Hamiltonian. 2

একটি গ্রাফের উদাহরণ দাও যেটা 'Eulerian' হবে কিন্তু 'Hamiltonian' হবে না।

एउटा graph को उदाहरण देऊ जो Eulerian हो तर Hamiltonian होइन।

(b) Give an example of a graph which is Hamiltonian but not Eulerian. 2

একটি গ্রাফের উদাহরণ দাও যেটা 'Hamiltonian' হবে কিন্তু 'Eulerian' হবে না।

एउटा graph को उदाहरण देऊ जो Hamiltonian हो तर Eulerian होइन।

(c) Give an example of closed walk of even length. 2

একটি জোড় দৈর্ঘ্যের বদ্ধ হাঁটার (Closed Walk) উদাহরণ দাও।

Even लम्बाइ भएको एउटा closed walk को उदाहरण देऊ।

11.(a) Define isomorphism of graphs. 2

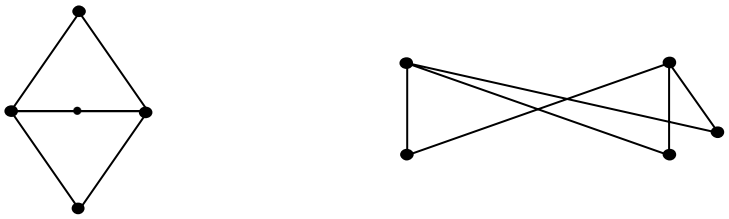
গ্রাফের 'isomorphism'-এর সংজ্ঞা দাও।

Graph हरूको isomorphism को परिभाषा देऊ।

(b) Prove that the two graphs are isomorphic. 4

প্রমাণ কর যে দুটি গ্রাফই 'isomorphic' হবে।

दुई graph हरू isomorphic छ भनी प्रमाण गर।



12. A graph G with n vertices, $(n-1)$ edges and no circuits is connected. 6

n শীর্ষবিন্দু এবং $(n-1)$ বাহু বিশিষ্ট একটি গ্রাফ-এর যদি কোন 'Circuit' না থাকে, তাহলে গ্রাফটি একটি সংযুক্ত গ্রাফ (Connected Graph) হবে।

n शिर्षहरू भएको $(n-1)$ किनाराहरू भएको अनि circuits नभएको graph G connected छ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions from the following 12×2 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

तलका कुनै दुई प्रश्नहरूका उत्तर देऊ

13.(a) Prove that a simple graph with n-vertices and k-components can have almost $\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ edges. 6

প্রমাণ কর যে n শীর্ষবিন্দু এর k উপাংশসহ (Components) একটি সাধারণ গ্রাফের সবচেয়ে বেশি $\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ সংখ্যা বাহু থাকতে পারে।

n शिर्षहरू अनि k-componentहरू भएको एउटा साधारण graph को लगभग $\frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ किनाराहरू हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(b) In a Binary tree T on n-vertices, then show that number of pendant vertices is $\frac{n+1}{2}$. Is it possible to draw a tree with 5 vertices having a degree 1, 1, 2, 2, 4. 6

দেখাও যে n শীর্ষবিন্দুযুক্ত একটি 'Binary Tree' T-তে $\frac{n+1}{2}$ সংখ্যক 'Pendant' শীর্ষবিন্দু থাকে। 5 টি শীর্ষবিন্দুযুক্ত একটি 'Tree' আঁকা সম্ভব কি যেখানে শীর্ষবিন্দুগুলির ডিগ্রী (degree) হবে 1, 1, 2, 2, 4।

n-शिर्षहरू भएको Binary tree T छ। स्वतन्त्र शिर्षहरूको संख्या $\frac{n+1}{2}$ छ भनी प्रमाण गर। Degree 1, 1, 2, 2, 4 भएको 5 शिर्षहरू भएको tree चित्रण गर्न सक्छ ?

14.(a) Prove that every connected graph has at least one spanning tree. 6

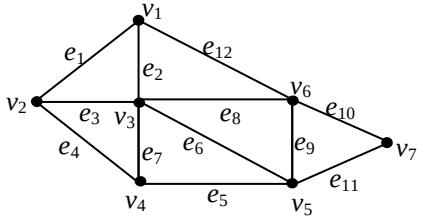
প্রমাণ কর যে প্রতিটি সংযুক্ত গ্রাফ (Connected Graph)-এ কমপক্ষে একটি 'Spanning Tree' রয়েছে।

प्रत्येक connected graph को कम से कम एउटा spanning tree छ भनी प्रमाण गर।

(b) Find the minimal spanning tree in the following graph: 6

নিম্নলিখিত গ্রাফে একটি 'Minimal Spanning Tree' খুঁজুনঃ

तल दिइएको graph बाट minimal spanning tree खोज गर।



15.(a) Prove that a graph G is a forest if and only if $e-n+k=0$, where e = number of edges, n = number of vertices of G, and k = number of component of G. 6

প্রমাণ কর যে একটি গ্রাফ একটি 'Forest' হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি $e-n+k=0$ হয়, যেখানে e = বাহুর সংখ্যা, n = শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা এবং $k = G$ -এর উপাংশ-এর সংখ্যা (Component)।

एउटा graph G forest हो यदि अनि यदि मात्र $e-n+k=0$, जहाँ e =किनाराहरूको संख्या, n = शिर्षहरूको संख्या G वो $k = G$ को component हरूको संख्या।

(b) Suppose G is a self complementary graph on n vertices. Prove that there is $k \in \mathbb{Z}^+$ such that $n = 4k$ or $n = 4k+1$. 6

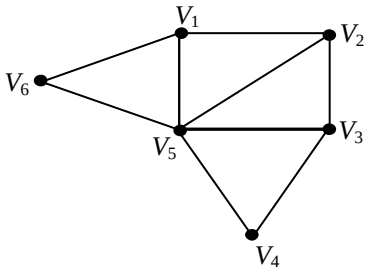
ধরা যাক G হল n শীর্ষবিন্দুযুক্ত একটি 'Self Complementary' গ্রাফ। প্রমাণ কর যে $n = 4k$ বা $n = 4k+1$ হবে, যেখানে k হল একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

भानौ G एउटा n शिर्षहरू भएको self complementary graph हो। प्रमाण गर त्यहाँ $k \in \mathbb{Z}^+$ छ जसमा $n = 4k$ अथवा $n = 4k+1$।

16.(a) Define adjacency matrix of a graph. Find the adjacency matrix of the following graph: 6

'Adjacency matrix' -এর সংজ্ঞা দাও। নিম্নলিখিত গ্রাফের 'Adjacency matrix' খুঁজুনঃ

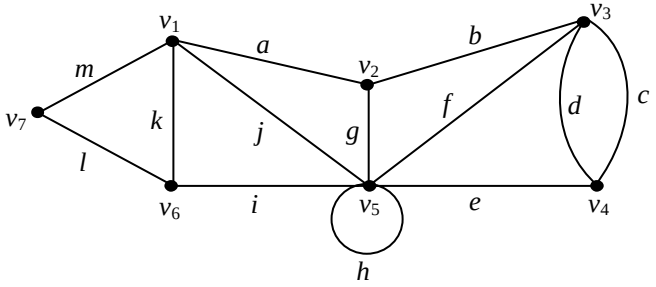
Graph को Adjacency matrix को परिभाषा लेख। दिइएको graph को adjacency matrix खोज गर।



(b) In the following graph: 6

নিম্নলিখিত গ্রাফেঃ

तल दिइएको graph मा



Find: (i) A walk of length 5 from v_5 to v_5.

(ii) A trail of length 9 from v_7 to v_1.

(iii) A circuit of length 7 from v_1 to v_1.

খুঁজুনঃ (i) v_5 থেকে v_5 পর্যন্ত 5 দৈর্ঘ্যের একটি 'Walk'।

(ii) v_7 থেকে v_1 পর্যন্ত 9 দৈর্ঘ্যের একটি 'Trail'।

(iii) v_1 থেকে v_1 পর্যন্ত 7 দৈর্ঘ্যের একটি 'Circuit'।

खोजः (i) v_5 देखि v_5 सम्मको 5 लम्बाइ भएको एउटा walk खोज।

(ii) v_7 देखि v_1 सम्मको 9 लम्बाइ भएको एउटा Trail खोज।

(iii) v_1 देखि v_1 सम्मको 7 लम्बाइ भएको एउटा circuit खोज।

——×——