समानो मन्त्रः समितिः समानी

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 5th Semester Examination, 2022

CC11-MATHEMATICS

GROUP THEORY-II

Time Allotted: 2 Hours

Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks

GROUP-A

1. Answer any ***four*** questions from the following: 3×4 = 12

(a) Give an example of a group G_1 and G_2 such that $G_1 \ncong G_2$, but $\text{Aut}(G_1) \equiv \text{Aut}(G_2)$. 3

(b) Prove that if G is a finite group, then G is a p-group if and only if $o(G) = p^n$. 3

(c) Let $o(G) = 30$. Show that either sylow-3-subgroup or sylow-5-subgroup is normal in G. 3

(d) Show that $\text{Inn}(G)$ is a subgroup of $\text{Aut}(G)$. 3

(e) Show that if G is non-abelian group then the mapping $f : G \to G$ defined by $f(x) = x^{-1}$ is not an automorphism. 3

(f) Let G be a finite group that has only two conjugate classes. Show that order of the group G is 2. 3

GROUP-B

2. Answer any ***four*** questions from the following: 6×4 = 24

(a) (i) If $Z(G)$ be the centre of a group G, then prove that $G/Z(G) \equiv \text{Inn}(G)$. 3+3

(ii) Find all abelian groups (up to isomorphism) of order 360.

(b) Show that for any prime p, there exists only two non-isomorphic groups of order p^2. 6

(c) State and prove Cauchy's theorem. 6

(d) Let G be a group. Let $\text{Aut}(G)$ denotes the set of all automorphisms of G and $A(G)$ be the set of all permutations on G. Then prove that $\text{Aut}(G)$ is a subgroup of $A(G)$. 6

Maynaguri College Library

(e) Let G be any group and A be a non-empty set. Then prove that any homomorphism from G to Sym(A), (where Sym(A) is symmetric group of A) defines an action of G on A. Conversely every action of G on A induces a homomorphism from G to Sym(A). 6

(f) Let G be a simple group of order 168. Find the number of subgroups of order 7. 6

GROUP-C

$12\times2=24$

3. Answer any *two* questions from the following: 4+4+4

(a) (i) Let G be a group of order p^2, where p is a prime. Then show that G is commutative.

(ii) Find $\mathrm{Aut}(K_4)$.

(iii) Let G be a group and S be a G-set. Show that for all $a\in S$, the subset $G_a=\{g\in G: ga=a\}$ is a subgroup of G. 5+3+4

(b) (i) Prove that there are only two non-commutative groups of order 8 (up to isomorphism).

(ii) Let S be a finite G-set, where G is a group of order p^n (p is a prime). Show that $|S|\equiv_p|S_0|$, where $S_0=\{a\in S \mid ga=a\ \forall\ g\in G\}$.

(iii) Let G be a group and $a\in G$. Prove that $a\in Z(G)$ if and only if $\mathrm{Cl}(a)=\{a\}$. 6+6

(c) (i) Let K be a subgroup of H and H be a subgroup of G. Suppose K is a characteristic subgroup of G and H/K is a characteristic subgroup of G/K. Then show that H is a characteristic subgroup of G.

(ii) Let G be a group of order 231. Show that 11-sylow subgroup of G is contained in the centre of G. 6+6

(d) (i) Let G be a group of order pqr, where $p<q<r$ being primes. Prove that some sylow subgroup of G is normal. Hence show that G is not simple.

(ii) Let G be a group that acts on a set A. Let $a\in A$, then prove that $|G|=|\mathrm{Stab}(a)|\times|\mathrm{Orbit}(a)|$.

——×——

Mayurbhanj College Library

समानो मन्त्रः समितिः समानी

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 5th Semester Examination, 2022

CC12-MATHEMATICS

NUMERICAL METHODS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 40

The figures in the margin indicate full marks.

GROUP-A

1. Answer any ***five*** questions from the following: $1\times5=5$

(a) Evaluate $(\Delta^2/E)(x^3)$.

(b) Evaluate $\Delta^3(2x^2-2x+1)$. Δ has its usual meaning.

(c) Discuss the convergency of the fixed point iteration method.

(d) Find the Lagrange's interpolation polynomial fitting the data points $f(1)=6$, $f(3)=0$, $f(4)=12$ for some function $f(x)$.

(e) When does Newton-Raphson method fail to find a real root of the equation $f(x)=0$?

(f) Find the number of significant figure in $V_T=1.5923$ given its relative error as 0.1×10^{-3}.

(g) Calculate the absolute, relative and percentage errors by approximating 5/3 with 1.6667.

(h) State the condition of convergence of Gauss-Seidel iteration method for solving numerically a system of linear equations.

GROUP-B

2. Answer any ***three*** questions from the following: $5\times3=15$

(a) Construct an appropriate difference table in respect of a function $f(x)$ using the following data table and find $f(0.5)$. 5

x:	0	1	2	3
y:	1	2	11	34

(b) Use the method of separation of symbols to prove: 5

$$u_0+\frac{u_1x}{1!}+\frac{u_2x^2}{2!}+\frac{u_3x^3}{3!}+\cdots$$

$$=e^x\left(u_0+x\Delta u_0+\frac{x^2}{2!}\Delta^2u_0+\cdots\right)$$

Prove that $\Delta\nabla=\Delta-\nabla$

Maynaguri College Library

(c) Use modified Euler method to compute $y(0.4)$ for the following initial value problem 5

$$\frac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 1$$

taking $h = 0.1$.

(d) Show that the order of convergence of Secant method is approximately 1.618. 5

(e) Compute $\sqrt{2}$ to four significant figures using Newton-Raphson method. 5

GROUP-C

3. Answer any ***two*** questions from the following: $10\times2 = 20$

(a) (i) Evaluate by Trapezoidal rule taking $h = 1$. 5+5

$$\int_0^5 \frac{dx}{(1+x)}$$

(ii) Evaluate by Simpson's $\frac{1}{3}$-rule taking six intervals correct up to 4 significant figures:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}\, dx$$

(b) (i) Write down the iteration scheme of Secant method and find the condition of convergence of Secant method. 5+5

(ii) Use Picard's method for solving the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \text{ for } x = 0.4$$

given $y = 0$ when $x = 0$.

(c) (i) Find the missing term in the following table: 3+3+4

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	3	8	—	21

(ii) Find the degree of precision of the quadrature formula

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

(iii) Construct the second degree least square approximation to $f(x) = \cos(\pi x)$ over $[-1, 1]$.

(d) (i) What is the main difference of Secant and Regula-Falsi method? Use Secant method to find a real root of the equation $x^3 - 9x + 1 = 0$ correct up to 3 decimal places. 5+5

(ii) Use Runge-Kutta method of order two to compute $y(0.4)$ from $\frac{dy}{dx} = x + y$ with $y(0) = 1$ taking $h = 0.1$.

———x———

Mayraguri College Library

समानो मन्त्रः समितिः समानी

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 5th Semester Examination, 2022

DSE-P2-MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks

The question paper contains DSE2A and DSE2B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* DSE2 courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

DSE2A

NUMBER THEORY

GROUP-A

1. Answer any ***four*** questions: $3\times4=12$

   (a) Find the inverse of 7 (mod 20). 3

   (b) Find the highest power of 11 dividing 1000. 3

   (c) Find the integer in the unit place of 2^{15}. 3

   (d) Verify Division Algorithm for Gaussian integers using $12+8i$ as dividend and $4-i$ as divisor. 3

   (e) Prove that for any integer a, $a^3 = 0, 1$ or $6 \pmod 7$. 3

   (f) Define Legendre Symbol. 3

GROUP-B

2. Answer any ***four*** questions: $6\times4=24$

   (a) If $x \equiv a \pmod{16}$, $x \equiv b \pmod 5$ and $x \equiv c \pmod{11}$, prove that 6
   $$x \equiv 385a + 176b - 560c \pmod{880}$$

   (b) Let $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ be a polynomial with integral coefficients such that $a_n \not\equiv 0 \pmod p$, p being a prime. Prove that the congruence $f(x) \equiv 0 \pmod p$ has at most n incongruent solutions. 6

   (c) If $2^n - 1$ is prime, prove that n must be a prime. Is the converse true? Justify. 6

   (d) Solve: $x^2 + 7x + 10 \equiv 0 \pmod{11}$ 6

Maynaguri College Library

(e) Find $\gcd(-3+11i, 8-i)$ in $\mathbb{Z}[i]$. Also, find $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ such that

$$\gcd(-3+11i, 8-i) = (-3+11i)x + (8-i)y \ .$$

(f) State and prove Fermat's two square theorem. 6

GROUP-C

3. Answer any *two* questions: 12×2 = 24

(a) (i) For any two integers a and n with $\gcd(a,n)=1$, prove that $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. 6

(ii) If p and q are distinct primes, then prove that $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$ 6

(b) (i) Prove that n is a prime iff $(n-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ 8

(ii) Define a quadratic residue. State Quadratic Reciprocity Law. 2+2

(c) (i) Find the number of positive integers less than 700 that are divisible by atleast one of the primes 3, 5 and 7. 6

(ii) Prove that $1+2+3+\cdots+n$ is a divisor of $1^r + 2^r + \cdots + n^r$ for any positive integer r. 6

(d) (i) Consider the linear Diophantine equation $ax + by = c$, where $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Show that the equation admits a solution iff $\gcd(a,b) \mid c$. 7

If (x_0, y_0) is a particular solution of the equation, find the general solution.

(ii) Solve : $x^2 \equiv 14 \pmod{5^3}$. 5

DSE2B

MECHANICS

GROUP-A

1. Answer any *four* questions: 3×4 = 12

(a) Define stable and unstable equilibrium. Write down statement of energy test of stability.

(b) Show that the momental ellipsoid at the centre of an ellipsoid is

$$(b^2+c^2)x^2 + (c^2+a^2)y^2 + (a^2+b^2)z^2 = \text{Constant.}$$

(c) Prove that the squares of the periodic times of the planets are proportional to the cubes of the mean distance from the Sun.

(d) A uniform cubical box of edge 'a' is placed on the top of a fix sphere. Show that the least radius of the sphere for which the equilibrium will be stable is $\frac{a}{2}$.

(e) State principle of virtual work.

(f) Define equimomental system. Under what conditions two systems will be equimomental?

Mayaguri College Library

GROUP-B

2. Answer any ***four*** questions: 6×4 = 24

(a) A particle is projected with velocity u at an inclination α above the horizon in a medium whose resistance per unit mass is k times the velocity. Show that its direction will again make an angle α below the horizon after a time. 6

$$\frac{1}{k}\log\left\{1+\frac{2ku}{g}\sin\alpha\right\}$$

(b) Define compound pendulum. Show that the centre of suspension and oscillation of a compound pendulum are interchangeable. 1+5

(c) A body rests in equilibrium on another fixed body being enough friction to prevent sliding. The portion of the two bodies in contact are spherical and of radii r and R and the line joining their centres in position of equilibrium is vertical. Show that the equilibrium is stable provided 6

$$\frac{1}{h}>\frac{1}{r}+\frac{1}{R}$$

where h is the height of the c.g. of the upper body in position of equilibrium above the point of contact.

(d) If a heavy body rests on a fixed body, find the nature of equilibrium. 6

(e) A straight smooth tube revolves with constant angular velocity ω in a horizontal plane about one extremity which is fixed. If initially a particle inside it be at a distance a from a fixed end and moving with constant velocity V along the tube, then show that its distance at time t is 6

$$a\cosh\omega t+\frac{V}{\omega}\sinh\omega t\,.$$

(f) Three forces P, Q, R act along the sides of a triangle formed by the lines $x+y=3$, $2x+y=1$ and $x-y+1=0$. Find the equation of line of action of the resultant. 6

GROUP-C

3. Answer any *two* questions: 12×2 = 24

(a) (i) Three forces act along the straight lines $x=0$, $y-z=a$; $y=0$, $z-x=a$; $z=0$, $x-y=a$. Show that they can not reduce to a couple. Prove also that if the system reduces to a single force, its line of action must lie in the surface 6

$$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=a^2\,.$$

(ii) Three equal uniform rods AB, BC, CD are freely joined and placed in a straight line on a smooth table. The rod AB is struck at its ends by a blow which is perpendicular to its length. Find the resulting motion and show that the velocity of the centre AB is 19 times that of CD and its angular velocity 11 times that of CD. 6

Maynaguri College Library

(b) (i) A solid homogeneous cone of height h and vertical angle 2α, oscillates about a horizontal axis through its vertex. Show that the length of the simple equivalent pendulum is 6

$$\frac{h}{5}(4+\tan^2\alpha)$$

(ii) The satellite Vanguard was launched at a velocity of 2000 km per hour at an altitude of 640 km. If the burn out velocity of the last stage was parallel to the Earth's surface, calculate the maximum altitude from the Earth's surface that the satellite will reach. Find also the semi-axes of the orbit and the orbital time. 6

(c) (i) A particle moves on the outside of a smooth elliptic cylinder whose axis is horizontal. The major axis of the principal elliptic section is vertical and the eccentricity of the section is e. If the particle starts from rest on the highest generator and moves in a vertical plane it will leave the cylinder at a point whose eccentric angle is given by $e^2\cos^3\phi = 3\cos\phi - 2$. 6

(ii) A smooth solid circular cone, of height h and vertical angle 2α, is at rest with its axis vertical in a horizontal circular hole of radius 'a'. Show that if $16a > 3h\sin 2\alpha$, the equilibrium is stable and there are two other positions of unstable equilibrium and that if $16a < 3h\sin 2\alpha$, the equilibrium is unstable and the position in which the axis is vertical is the only position of equilibrium. 6

(d) (i) Find the C.G. of a hemisphere whose density varies as the distance from a point on its plane edge. 6

(ii) A force P act along the axis of x and other force nP along a generator of the cylinder $x^2 + y^2 = a^2$. Show that the central axis lies on the cylinder 6

$$n^2(nx - z)^2 + (1+n^2)y^2 = n^4a^2.$$

——×——

Maynaguri College Library

"समानो मन्त्रः समितिः समानी"

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 5th Semester Examination, 2022

DSE1/2/3-P1- MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.

The question paper contains paper DSE-1A and DSE-1B.
The candidates are required to answer any *one* from *two* courses.
Candidates should mention it clearly on the Answer Book.

DSE-1A
MECHANICS

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions: 3×4 = 12
যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও।
कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख –

(a) A particle describes a curve whose equation is $\frac{a}{r} = \theta^2 + b$ under a force to the pole. Find the law of force.

মূলবিন্দু (pole) অভিমুখী বলের দ্বারা কোন একটি কণার ঘূর্ণন বক্রপথটি হল $\frac{a}{r} = \theta^2 + b$. উহার বলের নীতি নির্ণয় কর।

Pole मा एउटा बलको प्रभावले एउटा कण ले समिकरण $\frac{a}{r} = \theta^2 + b$ भएको वक्र वर्णन गर्छ भने बलको नियम निर्णय गर।

(b) Write down the principle of virtual work for a single particle. Explain the term virtual.
কোন একটি কণার ক্ষেত্রে principle of virtual work উল্লেখ কর। Virtual শব্দটির ব্যাখ্যা দাও।
एकल कणको लागी Virtual work को सिद्धान्त लेख। Virtual को व्याख्या गर।

(c) State the necessary and sufficient condition for the equilibrium of a system of coplanar forces acting on a rigid body.
একটি কঠিন বস্তুর উপর কার্যরত সমতলীয় বলসমূহের সাম্যাবস্থার প্রয়োজনীয় এবং যথাযথ অবস্থাগুলো বর্ণনা কর।
ठोस् body मा लगइएको coplanar बलको, system सन्तुलन हुने आवश्यक अनि पर्याप्त condition उल्लेख गर।

(d) What do you mean by constrained motion? Write down the principle of conservation of momentum under impulsive forces.
সীমাবদ্ধ গতি (Constrained motion) বলতে কি বোঝ ? ঘাতবলের অধীন ভরবেগের সংরক্ষণের নীতি উল্লেখ কর।
Constrained गति (motion) भन्नाले के बुझिन्छ ? आवेगात्मक बलको (impulsive force) प्रभावमा परेको गति (momentum) को सरक्षणको सिद्धान्त लेख।

Mahanadi College Library

(e) Explain the terms "Force of Friction" and "the angle of Friction".

ঘর্ষণ বল (Force of Friction) এবং ঘর্ষণ কোণ (the angle of Friction) শব্দদুটির ব্যাখ্যা দাও।

"Force of Friction" अनि "the angle of Friction" शब्दहरूको माने व्याख्या गर।

(f) The algebraic sums of the moments of a system of coplanar forces about points whose co-ordinates are (1, 0), (0, 2) and (2, 3) referred to rectangular axes are h, $2h$ and $3h$ respectively. Find the line of action of the resultant.

আয়তকার অক্ষের সাপেক্ষে (1, 0), (0, 2) এবং (2, 3) বিন্দুগুলোতে অবস্থিত সমতলীয় বলসমূহের পরিবর্তনের হারের গাণিতিক সমষ্টি যথাক্রমে h, $2h$ এবং $3h$। সমষ্টি বলের কার্যরেখা নির্ণয় কর।

Rectangular अक्षहरूको सन्दर्भमा co-ordinates (1, 0), (0, 2) अनि (2, 3) भएको बिन्दुहरूमा moments of a system of coplanar forces को बीजगणितीय योग फल क्रमै संगले h, $2h$ अनि $3h$ भए, परिणाममुखी को कार्यको रेखा (line of action) निर्णय गर।

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

2. Answer any ***four*** questions: $6\times4 = 24$

যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख –

(a) Three forces act along the straight lines $x=0,\ y-z=a;\ y=0,\ z-x=a;$ $z=0,\ x-y=a$. Show that if the system reduces to a single force its line of action must lie in the surface $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=a^2$.

নিম্নলিখিত সরলরেখাসমূহ

$x=0,\ y-z=a;\ y=0,\ z-x=a;\ z=0,\ x-y=a$ এর উপর তিনটি বল কার্যরত। দেখাও যে, যদি বলগুলোকে একটি বলে পরিবর্তীত করা হয় তাহলে ইহার কার্যরেখাটি নিম্নলিখিত বক্রতলের উপরে থাকবে।

$x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=a^2$

तिन बलहरू सरल रेखा $x=0,\ y-z=a;\ y=0,\ z-x=a;\ z=0,\ x-y=a$ मा act गर्छ। यदि system एकल बलमा परिणत हुन्छ भने कार्यको रेखा, सतह $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy=a^2$ मा निहित हुनुपर्छ भनी प्रमाण गर।

(b) Obtain the velocity and acceleration of a moving particle referred to rectangular axes OX and OY which are not fixed in space but rotate about the origin in their own plane.

আয়তকার অক্ষ OX এবং OY এর সাপেক্ষে গতিশীল কোন কণা যা শূন্যে (space) স্থায়ী নয় কিন্তু নিজ তলে ঘুরতে পারে তার বেগ ও ত্বরণ নির্ণয় কর।

Rectangular अक्षहरू OX अनि OY को सन्दर्भमा एउटा चलिरहेको कणको वेग (velocity) अनि प्रवेग (acceleration) निर्णय गर जो space मा स्थिर छैन तर आफ्नै plane मा उत्पत्ति की (origin) अड्डानमा घुम्छ (rotate)।

(c) Find the motion of a projectile in a resisting medium in which the resistance varies as velocity.

বাধাপ্রাপ্ত মাধ্যমে উৎক্ষেপনের গতি নির্ণয় কর যেখানে বেগের সাথে বাধার পরিবর্তন ঘটে।

एउटा प्रतिरोधी माध्यममा एउटा प्रक्षेपणको (projectile) गति निर्णय गर जहाँ प्रतिरोध वेग सित गर्छ।

(d) A particle is projected from an apse at a distance a with the velocity $\mu^{\frac{1}{2}}[(n+1)^{\frac{1}{2}}a^{n+1}]$, the central force being μr^{-2n-3}. Show that the equation of the orbit of the particle is $r^n=a^n\cos n\theta$.

Mayurbhanj College Library

কোন Apse এর a দূরত্ব থেকে একটি কণাকে $\mu^{\frac{1}{2}}[(n+1)^{\frac{1}{2}}a^{n+1}]$ গতিবেগে ছোঁড়া হল। দেখাও যে কণাটির কক্ষপথের সমীকরণ হবে $r^n = a^n \cos n\theta$।

এউটা কণ এউটা apse देखी $\mu^{\frac{1}{2}}[(n+1)^{\frac{1}{2}}a^{n+1}]$ को वेगले a दुरुत्व मा प्रक्षेपित गर्छ। केन्द्रीय बल μr^{-2n-3} हो। कणको कक्षाको समिकरण $r^n = a^n \cos n\theta$ हो भनी प्रमाण गर।

(e) A uniform rod OA of length $2a$, free to turn about its end O, revolves with uniform angular velocity ω about the vertical OZ through O, and inclined at a constant angle α to OZ. Find the value of α.

একটি মসৃণ দণ্ড OA যার দৈর্ঘ্য $2a$, O প্রান্তের সাপেক্ষে ঘুরতে পারে, O প্রান্ত থেকে OZ উল্লম্ব রেখার সাপেক্ষে ω কৌণিক বেগে ঘোরে এবং OZ এর সাথে α ধ্রুবক কোণে অবস্থান করে। তাহলে α এর মান নির্ণয় কর।

$2a$ लम्बाई भएको एउटा समान रड, आफ्नो अन्त्य O माथी घुम्न स्वतन्त्र भएको, O भएर ठाड़ो OZ माथी समान कोणीय वेग ω ले revolve गर्छ अनि OZ संग स्थिर कोण α ले झुकाउ गर्छ भने को मान निर्णय गर।

(f) A uniform solid cylinder is placed with its axis horizontal on a plane, whose inclination to the horizon is α. Show that the least coefficient of friction between it and the plane, so that it may roll and not slide, is $\frac{1}{3}\tan\alpha$. If the cylinder be hollow and of small thickness, the least value is $\frac{1}{2}\tan\alpha$.

একটি ভরাট সিলিন্ডারকে তার দিগন্ত অক্ষের সাথে কোন তলে রাখা আছে, দিগন্ত অক্ষের সাথে তার কৌণিক অবস্থান হল α। দেখাও যে সিলিন্ডার এবং তলের মধ্যেকার ঘর্ষণ গুনাঙ্কের সর্বনিম্ন মান হবে $\frac{1}{3}\tan\alpha$ যখন দণ্ডটি গড়িয়ে যেতে পারে কিন্তু ঘষটে যাবে না। যদি সিলিন্ডারটি ফাঁপা এবং হালকা হয়, তাহলে ঐ গুনাঙ্ক হবে $\frac{1}{2}\tan\alpha$।

एउटा समान ठोस cylinder आफ्नो अक्ष लाई plane मा तेर्सो राखेको छ, जसको horizon तिरको झुकाउ α हो। Plane र यसमा भएको घर्षण को least coefficient , जो पल्टिन्छ तर slide हुदैन, $\frac{1}{3}\tan\alpha$ को भनी प्रमाण गर। यदि cylinder भित्र बाट खोक्रो र कम मोटाइ भए, त्यसको least मान $\frac{1}{2}\tan\alpha$ हो भनी प्रमाण गर।

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

Answer any *two* questions $12\times2 = 24$

যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

कुनै दुई प्रश्नहरूको उत्तर लेख

3. (a) Four uniform rods are freely jointed at their extremities to form a parallelogram $ABCD$, which is suspended by the joint A, and is kept in shape by a string AC. Prove that the tension of the string is equal to half the whole weight. 6

চারটি সমদণ্ড তাদের প্রান্তের সাথে মুক্তভাবে একটি সামন্তরিক $ABCD$ আকারে যুক্ত করা আছে। যেটি A প্রান্তের সাপেক্ষে ঝুলানো আছে এবং তার আকার ধরে রাখার জন্য AC স্টিং দ্বারা বাঁধা আছে। প্রমাণ কর যে স্টিং এর টানের মান সমস্ত ওজনের অর্ধেক।

समानान्तर चतुर्भुज $ABCD$ बनाउँन चारवटा समान रडहरू लाई चरम सीमाहरूमा जोडिएको छ, जो A मा झुण्डाएको छ अनि तार AC ले आकार दिइएको छ। त्यस तार को तनाव पूरा ओजन भन्दा आधा छ भनी प्रमाण गर।

Maynaguri College Library

(b) Deduce the condition of stability of an orbit which is nearly circular under the action of a central force $F=\phi(u)$, where $u=\frac{1}{r}$. 6

একটি কক্ষপথের সাম্যাবস্থার শর্ত বের কর যেখানে পথটি $F=\phi(u)$, কেন্দ্রীয় বলের অধীনে প্রায় বৃত্তাকার, যেখানে $u=\frac{1}{r}$।

केन्द्रिय बल $F=\phi(u)$, $u=\frac{1}{r}$ को प्रभावले एउटा कक्षा जो लगभग गोलाकार भएको छ, त्यसको स्थिरता को condition निर्णय गर।

4. (a) Prove that any system of forces acting on a rigid body can be reduced to a single force and a couple whose axis lies along the line of action of the force. 5

প্রমাণ কর যে কোন কঠিন বস্তুর উপর কার্যরত বলসমূহকে একটি একক বল ও Couple এ পরিণত করা যায়, যার অক্ষ বলের কার্যরেখার উপর থাকে।

एउटा ठोस् body माथी प्रभाव परेको बलहरूको समूह, एउटा एकल बल अनि couple मा परिणत हुन्छ, जसको अक्ष बलको कार्यको रेखामा अवस्थित छ, भनी प्रमाण गर।

(b) Two equal smooth spheres, each of weight W and radius r, are placed inside a hollow cylinder open at both ends which rests on a horizontal plane, if $a(<2r)$ be the radius of the cylinder, show that the least weight it can have so as not to upset is $2W(1-\frac{r}{a})$. 7

সম ওজন W এবং সমব্যাসার্ধ r এর দুটি মসৃণ গোলককে, স্থির অবস্থানে দিগন্ততলে থাকে দু প্রান্ত যুক্ত কোন ফাঁপা সিলিন্ডারের ভিতরে রাখা আছে। যদি সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ $a(<2r)$ হয়, দেখাও যে এটার সর্বনিম্ন ওজন হবে $2W(1-\frac{r}{a})$।

तेर्सो समतल् मा राखिएको दुवै पटि खुल्ला अनि खोर्को cylinder भित्र दुईवटा समान smooth अण्डावृत्त दुवैको ओजन् W अनि त्रिज्या (radius) r छ, राखिएको छ। यदि $a(<2r)$ cylinder को त्रिज्या भए यसको ओजन कम से कम $2W(1-\frac{r}{a})$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

5. (a) Find the moment of inertia of a rigid body about any line, given the moments and products of inertia about three perpendicular axes. 6

যে কোন রেখার সাপেক্ষে একটি কঠিন বস্তুর moment of inertia বের কর, যেখানে তিনটি লম্ব অক্ষের সাপেক্ষেই তার moments এবং products of inertia দেওয়া আছে।

कुनै पनि रेखा माथीको ठोस् body को moment of inertia निर्णय गर। तिन लम्बवत अक्षहरू माथीको moment अनि product of inertia दिइएको छ।

(b) A heavy particle slides down a rough cycloid whose base is horizontal and vertex downwards. Show that if it starts from rest at the cusp and comes to rest at the vertex, then $\mu^2 e^{\mu\pi}=1$. 6

একটি অমসৃণ cycloid বরাবর একটি ভারী কণা গড়িয়ে পরছে, cycloid টির পাদদেশ দিগন্ত বরাবর এবং vertex নিম্নমুখী আছে। যদি কণাটি স্থির অবস্থায় cusp থেকে শুরু করে vertex এসে আবার স্থির হয় তবে দেখাও যে $\mu^2 e^{\mu\pi}=1$।

Base तेर्सो भएको र शीर्ष तल तिर भएको cycloid माथी एउटा भारी कण लाई तल स्लाइड गर्दछ। यदि cusp मा विश्राम देखी शुरु गरेर शीर्षमा आउँछ भने $\mu^2 e^{\mu\pi}=1$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

6. (a) If a rocket, originally of mass M, throws off every unit of time a mass eM with relative velocity V and if M' be the mass of the case, then show that it cannot rise at once unless $eV>g$, nor at all unless $\frac{eMV}{M'}>g$. 6

Mayapatri College Library

যদি M ভরের একটি রকেট যার আপেক্ষিক গতিবেগ V, প্রতি একক সময়ে eM ভর ছুঁড়ে ফেলে এবং যদি আবরণের ভর M' হয়, তাহলে দেখাও যে এটি একবারে উড়তে পারবে না যদি না $eV > g$ হয় অথবা একেবারেই না যদি না $\frac{eMV}{M'} > g$ হয়।

यदि मूल रूपमा द्रव्यमान M भएको रकेटले प्रत्येक समयको एकाँईमा relative वेग V ले द्रव्यमान eM फ्याकँछ अनि यो case मा द्रव्यमान M' भए, त्यो एक पल्टको पनि rise हुदैन जब सम्म $eV > g$ न त पटक्कै rise हुन्छ जब सम्म $\frac{eMV}{M'} > g$ ।

(b) A body of mass m moving in a straight line encounters a resistance proportional to the velocity and this is the only force acting on the body. If the body starts with velocity V, show that the distance s traversed by it in time t is given by 6

$$s = \frac{mV}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$$

m ভরের একটি বস্তু, কোন বাধা যা বস্তুটির বেগের সমানুপাতিক তার বিরুদ্ধে সরলরেখায় চলতে থাকে এবং ঐ বাধাই একমাত্র বল যেটি বস্তুটির উপর কাজ করছে। যদি বস্তুটি V গতিবেগে যাত্রা শুরু করে, দেখাও যে t সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব s এর পরিমান হবে $s = \frac{mV}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$

एउटा द्रव्यमान m भएको body सरल रेखा मा चलिरहेको बेला वेग संग proportional प्रतिरोधको सामना हुन्छ अनि body मा यो मात्र बलको प्रभाव हो। यदि वेग V ले body ले शुरु गरे, यसले दूरी s समय t मा पार गरेको हो $s = \frac{mV}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)$ भनी प्रमाण गर।

DSE-1B

GROUP THEORY AND LINEAR ALGEBRA

GROUP-A / বিভাগ-ক / समूह-क

1. Answer any ***four*** questions from the following: 3×4 = 12
নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख –

(a) Express the permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ as the product of disjoint cycles. Find the order of the permutation. Determine whether the permutation is even or odd. 1+1+1

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ permutation টিকে বিচ্ছিন্ন চক্রের (disjoint cycles) গুণফল আকারে প্রকাশ কর। Permutation টি যুগ্ম না অযুগ্ম তা নির্ণয় কর।

Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ लाई विच्छेदन (disjoint) cycle हरूको गुणनफल मा परिणत गर। Permutation को order लेख। Permutation सम वा विषम (even or odd) हो निर्धारण गर।

(b) Let G be the group of all 2×2 non-singular matrices over the real numbers. Find the centre of G. 3
ধরা যাক, G একটি সকল 2×2 non-singular বাস্তব সংখ্যার ম্যাট্রিক্স। G এর কেন্দ্র (centre) নির্ণয় কর।

মানौ G एउटा 2×2 non-singular वास्तविक संख्याहरूको matrices को group हो। G को केन्द्र (centre) निर्णय गर।

Maynaguri College Library

(c) Show that $\{(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$ are linearly independent in $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. 3

দেখাও যে, $\{(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$ সেটটি $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$-এ রৈখিকভাবে স্বতন্ত্র (linearly independent)।

$\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ मा $\{(0, 1, -2), (1, -1, 1), (1, 2, 1)\}$ रैखिक रूपमा स्वतन्त्र छ भनी प्रमाण गर।

(d) Let G be any group. For any elements a, b, x in G, show that $o(a) = o(x^{-1}ax)$. 3

মনে কর G যে কোন একটি group । G-এর যে কোন উপাদান a, b, x -এর জন্য, দেখাও যে, $o(a) = o(x^{-1}ax)$

Group G को कुनै पनि elements a, b, x को लागी $o(a) = o(x^{-1}ax)$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(e) Find all elements of order 8 in $(\mathbb{Z}_{24}, +_{24})$. 3

$(\mathbb{Z}_{24}, +_{24})$ -এর 8 ক্রমের (order) সকল উপাদানগুলি নির্ণয় কর।

$(\mathbb{Z}_{24}, +_{24})$ मा order 8 भएको सबै element हरू निर्णय गर।

(f) For what values of k , does the set $S = \{(k, 1, k), (0, k, 1), (1, 1, 1)\}$ form a basis of $\mathbb{R}^3$? 3

k-এর কোন মানের জন্য, $S = \{(k, 1, k), (0, k, 1), (1, 1, 1)\}$ সেটটি $\mathbb{R}^3$-এর basis গঠন করে।

k को कति मान ले, सेट $S = \{(k, 1, k), (0, k, 1), (1, 1, 1)\}$ $\mathbb{R}^3$ को basis हुन्छ ?

GROUP-B / বিভাগ-খ / समूह-ख

2. Answer any ***four*** questions from the following 6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

कुनै चार प्रश्नहरूको उत्तर लेख –

(a) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic. 6

প্রমাণ কর যে, cyclic-এর প্রত্যেকটি subgroup cyclic হবে।

Cyclic group को प्रत्येक उप group cyclic हो भनी प्रमाण गर।

(b) (i) Show that $SL(2, \mathbb{R})$ is a subgroup of $GL(2, \mathbb{R})$. 3+3

প্রমাণ কর যে, $SL(2, \mathbb{R})$ একটি $GL(2, \mathbb{R})$-এর subgroup হবে।

$SL(2, \mathbb{R})$ $GL(2, \mathbb{R})$ को उप group हो भनी प्रमाण गर।

(ii) Prove that intersection of two normal subgroups of a group is a normal subgroup.

দেখাও যে , দুটি normal subgroup-এর ছেদ (intersection) একটি normal subgroup হবে।

कुनै group को दुई normal उप group को प्रतिच्छेदन (intersection) normal उप group हो भनी प्रमाण गर।

(c) (i) Find the centre of the group S_3. 3+3

S_3 গ্রুপ (group)-এর কেন্দ্র (centre) নির্ণয় কর।

Group S_3 को केन्द्र निर्णय गर।

(ii) Prove that a non-empty subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.

দেখাও যে, একটি অশূন্য উপসেট H তার একটি group G এর subgroup হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি (if and only if) $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

Group G को खाली नभएको उपसेट H एउटा उप group हो यदि आदि यदि मात्र $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ ।

Mayapur College Library

(d) Find the linear mapping from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$ which has its range subspace spanned by $(1, 0, -1)$ and $(1, 2, 2)$. 6

$\mathbb{R}^3$ থেকে $\mathbb{R}^3$ পর্যন্ত রৈখিক ম্যাপিং (linear mapping) খুঁজে বের কর, যার range subspace টি $(1, 0, -1)$ এবং $(1, 2, 2)$ দ্বারা বিস্তৃত (spanned)।

Subspace को दायरा $(1, 0, -1)$ अनि $(1, 2, 2)$ ले बनिएको रैखिक mapping $\mathbb{R}^3$ देखि $\mathbb{R}^3$ सम्म निर्णय गर।

(e) Prove that the linear mapping $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ defined by $T(1, 2, 3) = (3, -1, 7)$, $T(1, -2, 3) = (3, 3, 3)$ and $T(1, 2, -3) = (3, -1, 1)$ is one-one and onto. 6

প্রমাণ কর যে, $T(1, 2, 3) = (3, -1, 7)$, $T(1, -2, 3) = (3, 3, 3)$ এবং $T(1, 2, -3) = (3, -1, 1)$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত (defined) রৈখিক ম্যাপিংটি (linear mapping) একটি one-one এবং onto ম্যাপিং (mapping)।

$T(1, 2, 3) = (3, -1, 7)$, $T(1, -2, 3) = (3, 3, 3)$ अनि $T(1, 2, -3) = (3, -1, 1)$ ले परिभाषित रैखिक mapping $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ one-one अनि onto हो भनी प्रमाण गर।

(f) (i) Let $S = \{(1, 4), (0, 3)\}$ be a subset of $\mathbb{R}^2$. Show that $(3, 3)$ belongs to $L(S)$. 3+3

मनে कर, $S = \{(1, 4), (0, 3)\}$ হল $\mathbb{R}^2$ -এর একটি উপসেট। দেখাও যে, $(3, 3)$, $L(S)$-এর অন্তর্গত (belongs to)।

मानौ $S = \{(1, 4), (0, 3)\}$ $\mathbb{R}^2$ को उपसेट हो/प्रमाण गर $(3, 3)$ $L(S)$ मा सम्बन्धित छ।

(ii) If $v_1, v_2, v_3 \in V(\mathbb{F})$, such that $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ then show that $\{v_1, v_2\}$ spans the same subspace as $\{v_2, v_3\}$ i.e. show that $L(\{v_1, v_2\}) = L(\{v_2, v_3\})$.

যদি $v_1, v_2, v_3 \in V(\mathbb{F})$ যেখানে, $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ তাহলে দেখাও যে, $\{v_1, v_2\}$ এবং $\{v_2, v_3\}$ একই subspace বিস্তৃত (span) করে অর্থাৎ দেখাও যে, $L(\{v_1, v_2\}) = L(\{v_2, v_3\})$

यदि $v_1, v_2, v_3 \in V(\mathbb{F})$ जहाँ $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ हो भने, $\{v_1, v_2\}$ ले $\{v_2, v_3\}$ ले जस्तै उप space span गर्छ भनी प्रमाण गर अर्थात प्रमाण गर $L(\{v_1, v_2\}) = L(\{v_2, v_3\})$ ।

GROUP-C / বিভাগ-গ / समूह-ग

3. Answer any ***two*** questions from the following $12 \times 2 = 24$

निम्नलिखित যে-কোন ***দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও:

कुनै दुईवटा प्रश्नहरूको उत्तर लेख –

(a) (i) Show that $Z(S_n) = \{I\}$ $(n \geq 3)$. 3+6+3

দেখাও যে, $Z(S_n) = \{I\}$ $(n \geq 3)$

प्रमाण गर $Z(S_n) = \{I\}$ $(n \geq 3)$ ।

(ii) Prove that HK is subgroup of G iff $HK = KH$.

দেখাও যে, HK, G-এর একটি subgroup হবে যদি এবং শুধুমাত্র যদি (iff) $HK = KH$ হয়।

HK group G को उप group हो यदि अनि यदि मात्र $HK = KH$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(iii) Prove that $L(S)$ is the smallest subspace of V containing S.

প্রমাণ কর যে, S কে ধারণ করে এমন ক্ষুদ্রতম subspaceটি হল $L(S)$।

S लाई contain गर्ने, V को सबैभन्दा सानो उप space $L(S)$ हो भनी प्रमाण गर।

Turn Over

Mayureswar College Library

(b) (i) Show that $V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow V = W_1 + W_2, W_1 \cap W_2 = \{0\}$. 6+3+3

দেখাও যে, $V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow V = W_1 + W_2, W_1 \cap W_2 = \{0\}$

প্রমাণ গর $V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow V = W_1 + W_2, W_1 \cap W_2 = \{0\}$ ।

(ii) Prove that a subgroup H of G is normal iff $Ha \neq Hb \Rightarrow aH \neq bH$ for $a, b \in G$.

প্রমাণ কর যে, G-এর subgroup H হল normal যদি এবং শুধুমাত্র যদি (iff) $Ha \neq Hb \Rightarrow aH \neq bH$ যেখানে $a, b \in G$

G को उप group normal हो यदि अनि यदि मात्र $Ha \neq Hb \Rightarrow aH \neq bH$ $a, b \in G$ को लागी।

(iii) If H and K are two normal subgroups of a group G such that $H \cap K = \{e\}$ then show that $hk = kh \ \forall h \in H, k \in K$.

যদি H এবং K, G-এর দুটি এমন normal subgroup, যেখানে $H \cap K = \{e\}$, তাহলে দেখাও যে, $hk = kh \ \forall h \in H, k \in K$

यदि group G को H अनि K दुईवटा normal उप group भए, जहाँ $H \cap K = \{e\}$, $hk = kh \ \forall h \in H, k \in K$ हुन्छ भनी प्रमाण गर।

(c) (i) Prove that every permutation on a finite set is either a cycle or it can be expressed as a product of disjoint cycles. 6+6

প্রমাণ কর যে, সসীম সেটের অন্তর্গত সকল permutation হয় একটি চক্র (cycle) অথবা এটিকে বিচ্ছিন্ন চক্রসমূহের (disjoint cycles) গুণফল আকারে প্রকাশ করা যায়।

सिमित सेटको प्रत्येक permutation या cycle हो अथवा यसलाई विच्छेदन् cycle हरुको गुणनफल मा लेख्न सकिन्छ भनी प्रमाण गर।

(ii) Show that the set $\{1, 1+x, x^2+2x\}$ is a basis for $P_2(\mathbb{R})$, the vector space of all polynomials of degree ≤ 2.

দেখাও যে, $\{1, 1+x, x^2+2x\}$ সেটটি $P_2(\mathbb{R})$-এর জন্য একটি basis হবে, যেখানে $P_2(\mathbb{R})$ হল বহুপদী যার ক্রম 2-এর কম-র গঠিত vector space ।

सेट $\{1, 1+x, x^2+2x\}$ $P_2(\mathbb{R})$ को basis हो भनी प्रमाण गर। $P_2(\mathbb{R})$ degree ≤ 2 भएको बहुपदको vector space हो।

(d) (i) Prove that every group of prime order is cyclic. 4+4+4

দেখাও যে, সকল মৌলিক ক্রমের group, cyclic হবে।

Order prime भएको प्रत्येक group cyclic हो भनी प्रमाण गर।

(ii) Let α and β belongs to S_n. Prove that $\beta \times \beta^{-1}$ and α are both even or both odd.

মনে কর, α এবং β হল S_n-এর অন্তর্গত। দেখাও যে, $\beta \times \beta^{-1}$ এবং α হল উভয়েই যুগ্ম অথবা উভয়েই অযুগ্ম।

मानौ α अनि β S_n मा समावेश गर्छ। $\beta \times \beta^{-1}$ अनि α दुवै सम अथवा विषम हो भनी प्रमाण गर।

(iii) Show that the vectors (1, 2, 3), (0, 1, 2) and (0, 0, 1) generate $\mathbb{R}^3$.

দেখাও যে, (1, 2, 3), (0, 1, 2) এবং (0, 0, 1) ভেক্টরগুলি দ্বারা $\mathbb{R}^3$ গঠিত (generate) হয়।

(1, 2, 3), (0, 1, 2) अनि (0, 0, 1) ले $\mathbb{R}^3$ लाई उत्पन्न गर्छ भनी प्रमाण गर।

———×———

Mayapur College Library