UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 6th Semester Examination, 2021

CC13-MATHEMATICS

RING THEORY AND LINEAR ALGEBRA-II

Full Marks: 60

ASSIGNMENT

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

GROUP-A

Answer *all* questions from the following $2\times5 = 10$

1. Let $\boldsymbol{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ be the basis of C^3 defined by $\alpha_1 = (1,\ 0,\ -1)$, $\alpha_2 = (1,\ 1,\ 1)$, $\alpha_3 = (2,\ 2,\ 0)$. Find the dual basis of $\boldsymbol{B}$.

2. Show that $\sqrt{-3}$ is a prime element in the integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

3. Find the orthogonal complement of $W = \text{span}\{(1,\ 1,\ 1)\}$ in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$ with standard inner product.

4. Let $(|)$ denotes the standard inner product on $\mathbb{R}^2$. Let $\alpha = (2,\ 1)$, $\beta = (1, -1)$. If μ is a vector such that $(\alpha \mid \mu) = 3$, $(\beta \mid \mu) = 2$, then find μ.

5. Show that $1 - i$ is irreducible in $\mathbb{Z}[i]$.

GROUP-B

Answer *all* questions from the following $10\times3 = 30$

6. (a) Use Gram-Schmidt process to obtain an orthogonal basis from the basis $\{(1,\ 0,\ 1), (1,\ 1,\ 1), (1,\ 3,\ 4)\}$ of Euclidean space $\mathbb{R}^3$ with standard inner product. 4+3+3

   (b) Let $\mathbb{R}^3$ be a Euclidean space with standard inner product and $T : V \to V$ be defined by $T(x,\ y,\ z) = (x+2y,\ x-z,\ x+3y-2z)$. Find T^*, adjoint of T.

   (c) Find an orthonormal basis of the row space of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

7. (a) Find all the maximal and prime ideals of $\mathbb{Z}_{10}$. 3+3+4

(b) Let D be a Euclidean domain with Euclidean valuation ν. If $a|b$ and $\nu(a)=\nu(b)$, prove that a and b are associates in D.

(c) Is the integral domain $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]=\{a+b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$, a unique factorization domain? Justify your answer.

8. (a) Find a 3×3 matrix for which the minimal polynomial is x^2. 5+5

(b) Let T be a linear operator on $\mathbb{R}^4$ which is represented in the standard basis by the matrix.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

Under what conditions, T is diagonalizable?

GROUP-C

Answer *all* questions from the following 5×2 = 10

9. (a) Find the eigen values and corresponding eigenspace of the matrix kI_5. Generalize the result for the matrix kI_n. 4+1

(b) Show that the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ is not diagonalizable.

10. If N_1, N_2 be any two normal operators such that either permutes with the adjoint of the other, then prove that N_1+N_2 and N_1N_2 are normal. 5

GROUP-D

Answer *all* questions from the following 5×2 = 10

11. Find the minimal polynomial of the matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 5

12.(a) Use Cayley-Hamilton theorem to find A^{70}, where $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. 2+3

(b) Let R be a ring of all real valued continuous functions defined on [0, 1] and $M=\{f(x)\in R : f(1/5)=0\}$. Prove that M is a maximal ideal of R.

——×——

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 6th Semester Examination, 2021

CC14-MATHEMATICS

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND APPLICATIONS

Full Marks: 60

ASSIGNMENT

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

Answer *all* questions from the following

GROUP-A

1. Answer ***all*** questions: 2×5 = 10

(a) Obtain the partial differential equation for $Z = f(\sin x + \cos y)$.

(b) Solve $\sqrt{p} + \sqrt{q} = 1$, where symbols have their usual meaning.

(c) State whether the following partial differential equations are linear, quasi-linear or nonlinear:

(i) $U_{xx} + U_{yy} + \log U = 0$

(ii) $U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} = \sin x$

(d) Find the general integral of the linear partial differential equation

$$x(x^2 + 3y^2)\, p - y(3x^2 + y^2)\, q = 2z(y^2 - x^2)$$

(e) Obtain the solution of the linear partial differential equation $U_x - U_y = 1$ with the Cauchy data $U(x, 0) = x^2$.

GROUP-B

2. (a) Use separation of variables $U(x, y) = f(x)g(y)$ to solve the equation 4+6

$$y^2 U_x^2 + x^2 U_y^2 = (xyu)^2$$

(b) Find the solution of the initial value problem,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in R, \quad t > 0 \quad \text{and} \quad u(x, 0) = \log(1 + x^2), \quad u_t(x, 0) = 2$$

3. Classify the following equations and reduce it to its canonical form 5+5

(a) $U_{xx} - (\operatorname{sec}h^4 x)\, U_{yy} = 0$

(b) $\sin^2 x \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sin 2x \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \cos^2 x \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x$

4. (a) Solve by method of characteristic for $x > 0$, $xU_x + yU_y = xe^{-u}$, $u(x,\ x^2) = x$. 5+5

(b) Solve: $(y^3 x - 2x^4)\ p + (2y^4 - x^3 y)\ q = 9z(x^3 - y^3)$

GROUP-C

5. (a) Determine the solution of the initial boundary-value problem 5+5

$$U_{tt} = 16\, U_{xx} \quad , \quad 0 < x < \infty \ , \quad t > 0$$
$$U(x, 0) = \sin x \quad , \quad 0 \le x \le \infty$$
$$U_t\ (x, 0) = x^2 \quad , \quad 0 \le x \le \infty$$
$$U(0,\ t) = 0 \quad , \quad t \ge 0$$

(b) Solve by method of separation of variables for $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2\dfrac{\partial u}{\partial t} + u$, where $u(x,\ 0) = 6e^{-3x}$.

GROUP-D

6. (a) Apply $\sqrt{U} = V$ and $V(x, y) = f(x) + g(y)$ to solve the equation 5+5

$$x^4 U_x^2 + y^2 U_y^2 = 4U$$

(b) Find the solution of the initial value system

$$U_t + 3UU_x = V - x\ ,\ \ V_t - cV_x = 0 \quad \text{with} \quad U(x, 0) = x \quad \text{and} \quad V(x, 0) = x$$

——×——

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 6th Semester Examination, 2021

DSE2-MATHEMATICS

Full Marks: 60

ASSIGNMENT

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains paper DSE-2A and DSE-2B.
The candidates are required to answer any *one* from *two* courses.
Candidates should mention it clearly on the Answer Book.

DSE-2A

METRIC SPACES AND COMPLEX ANALYSIS

Answer *all* the questions

সকল প্রশ্নের উত্তর দাও

GROUP-A / বিভাগ-ক $2\times 5 = 10$

1\. (a) Find the diameters of the sets $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ and $(-1, 1) \cap \mathbb{Q}$ in the euclidean metric space $(\mathbb{R}, d)$.

Euclidean metric space $(\mathbb{R}, d)$ তে $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ এবং $(-1, 1) \cap \mathbb{Q}$ সেট দ্বয়ের ব্যাসগুলি নির্ণয় কর।

(b) Evaluate: $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+1}$

মান নির্ণয় করঃ $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{dz}{z^2+1}$

(c) Find the image of the point $z = \sqrt{3} - i$ on the Riemann sphere under the stereographic projection.

Riemann sphere-এর উপর stereographic অভিক্ষেপ (projection) দ্বারা $z = \sqrt{3} - i$ বিন্দুটির প্রতিবিম্ব (image)-টি নির্ণয় কর।

(d) Show that a harmonic function $u(x, y)$ satisfies the differential equation $\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0$.

দেখাও যে যে-কোন একটি harmonic অপেক্ষক $u(x, y)$ অবকল সমীকরণ $\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial \bar{z}} = 0$ কে সিদ্ধ করে।

(e) Let x, y, z be three elements in a metric space (X, d). Show that

$$|d(x, z)-d(y, z)| \leq d(x, y)$$

(X, d) metric space এর x, y, z তিনটি উপাদান (element) হলে, প্রমাণ কর

$$|d(x, z)-d(y, z)| \leq d(x, y)$$

GROUP-B / বিভাগ-খ

12×3=36

2. (a) Consider the euclidean metric space $(\mathbb{R}^2, d)$. Show that the sets $A=\{(x, y): x^2+y^2<1\}$ and $B=\{(x, y): (x-2)^2+y^2<1\}$ are mutually disjoint but $d(A, B)=0$. 4

ধর $(\mathbb{R}^2, d)$ একটি Euclidean metric space. তাহলে দেখাও যে $A=\{(x, y): x^2+y^2<1\}$ এবং $B=\{(x, y): (x-2)^2+y^2<1\}$ সেটদ্বয় পারস্পরিক বিচ্ছিন্ন (mutually disjoint) কিন্তু $d(A, B)=0$.

(b) If $f=u+iv$ is analytic on a domain D, then show that uv is harmonic on D. 3

D ক্ষেত্রটিতে $f=u+iv$ যদি analytic হয় তাহলে দেখাও যে uv, D ক্ষেত্রটিতে harmonic হবে।

(c) Show that the set of natural number is not complete with respect to the metric $d(m, n)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|$, m, n are natural numbers. 5

প্রমাণ কর স্বাভাবিক সংখ্যার সেটটি $d(m, n)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|$, (যেখানে m, n হল স্বাভাবিক সংখ্যা) metric-এর সাপেক্ষে complete নয়।

3. (a) Evaluate $\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z+2}$ and hence deduce that $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\, d\theta=0$. 6

$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z+2}$ এর মান নির্ণয় কর এবং ইহা থেকে দেখাও $\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta}\, d\theta=0$.

(b) Show that $(\mathbb{R}, d)$ is a metric space, when d is given by 4

$$d(x, y)=\begin{cases} |x-y|, & \text{if } xy \leq 0 \\ |x|+|y|, & \text{otherwise} \end{cases}$$

প্রমাণ কর $(\mathbb{R}, d)$ একটি metric space যেখানে d নিম্নলিখিতভাবে প্রদত্তঃ

$$d(x, y)=\begin{cases} |x-y|, & \text{if } xy \leq 0 \\ |x|+|y|, & \text{অন্যথায়} \end{cases}$$

(c) What can you say about the differentiability of the function $f(z)=\frac{z}{3-z}$? 2

$f(z)=\frac{z}{3-z}$ অপেক্ষকটির অন্তরকলন যোগ্যতা (differentiability) সম্পর্কে তুমি কি বলবে ?

4. (a) If $f(z)=\begin{cases} e^{-1/z^4} & , \quad z \neq 0 \\ 0 & , \quad z=0 \end{cases}$ 6

then show that it satisfied the C-R equations at $z=0$ but it is not differentiable at $z=0$.

যদি $f(z)=\begin{cases} e^{-1/z^4} & , \quad z \neq 0 \\ 0 & , \quad z=0 \end{cases}$

তাহলে দেখাও যে $z=0$ তে f অপেক্ষকটি C-R সমীকরণকে সিদ্ধ করে, কিন্তু $z=0$ তে f অপেক্ষকটি অবকলনযোগ্য নয়।

(b) If (x_n) and (y_n) are Cauchy sequence in a metric space $(X,\, d)$, show that (a_n), where $a_n = d(x_n,\, y_n)$, converges. Give one such example. 4

$(X,\, d)$ metric space এ যদি (x_n) এবং (y_n) দুটি Cauchy অনুক্রম (sequence) হয় তাহলে দেখাও যে (a_n) অনুক্রমটি (যেখানে $a_n = d(x_n,\, y_n)$) অভিমুখী হবে। একটি উদাহরণের সাহায্যে বুঝিয়ে দাও।

(c) Prove that for any two distinct points a, b in a metric space $(X,\, d)$ there exist disjoint open spheres with centres a and b respectively. 2

দেখাও যে $(X,\, d)$ metric space এ যে কোন দুটি পৃথক বিন্দু a এবং b এর জন্য দুটি ভিন্ন a এবং b কেন্দ্রবিন্দু বিশিষ্ট মুক্ত গোলক (open sphere) বিদ্যমান।

GROUP-C / বিভাগ-গ

$7\times 2 = 14$

5. (a) Prove that the argument function 'arg', where arg: $\mathbb{C}-\{0\} \to (-\pi, \pi]$ is not a continuous function. 3

দেখাও যে arg : $\mathbb{C}-\{0\} \to (-\pi, \pi)$, argument অপেক্ষকটি একটি সন্তত অপেক্ষক নয়।

(b) Evaluate: $\displaystyle\int_{|z+4|=2} \frac{z\,dz}{(16-z^2)(z+i)}$ 4

মান নির্ণয় করঃ $\displaystyle\int_{|z+4|=2} \frac{z\,dz}{(16-z^2)(z+i)}$

6. Show that $\mathbb{R}$ is complete with respect to d_1 but not with respect to d_2, where 7

$$d_1(x,\, y) = 5\,|x-y| \quad , \quad d_2(x,\, y) = |\tan^{-1} x - \tan^{-1} y|, \quad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$$

দেখাও যে d_1 এর সাপেক্ষে $\mathbb{R}$ একটি পূর্ণ (complete), কিন্তু d_2 এর সাপেক্ষে complete নয়,

যেখানে $d_1(x,\, y) = 5\,|x-y| \quad , \quad d_2(x,\, y) = |\tan^{-1} x - \tan^{-1} y|, \quad \forall\, x,\, y \in \mathbb{R}$

DSE-2B
LINEAR PROGRAMMING

GROUP-A / বিভাগ-ক

Answer *all* the following questions $2\times 5 = 10$

***সকল* প্রশ্নের উত্তর দাও**

1. (a) Examine the set of points $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ on the xy-plane is convex or not.

xy-সমতলে অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ উত্তল (Convex) কিনা পরীক্ষা কর।

(b) Show that although (2, 3, 2) is a feasible solution to the system of equations

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$
$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

but it is not a basic solution.

দেখাও যে (2, 3, 2) সমীকরণ সিস্টেম

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$
$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

-এর সম্ভাব্য সমাধান (feasible solution) হলেও, তা কিন্তু মৌলিক সমাধান (Basic solution) নয়।

(c) Find the extreme points, if any of the set $X = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 2\}$.

সেট $X = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 2\}$ -এর কোনো চরম বিন্দুসমূহ (extreme points) থাকলে তা বের কর।

(d) Verify graphically whether the following L.P.P. has a bounded or unbounded solution:

Maximize $z = 3x_1 + 2x_2$

Subject to $x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 + x_2 \geq 3$

and $x_1,\ x_2 \geq 0$

লেখচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত এল.পি.পি (L.P.P)-টির সীমাবদ্ধ বা সীমাহীন সমাধান (Bounded or unbounded solution) আছে কিনা যাচাই করঃ

সর্বাধিক (Maximize) $z = 3x_1 + 2x_2$

-এর সাপেক্ষে (Subject to) $x_1 - x_2 \leq 1$

$x_1 + x_2 \geq 3$

এবং $x_1,\ x_2 \geq 0$

(e) Show that whatever may be the value of λ, the game with the following payoff matrix is strictly determinable:

$$\begin{array}{cc} & \textbf{Player-B} \\ \textbf{Player-A} & \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

দেখাও যে λ-এর যেকোন মানের জন্য নিম্নলিখিত পরিশোধ ম্যাট্রিক্স (Payoff matrix) বিশিষ্ট খেলা (Game) কঠোরভাবে নির্ধারণযোগ্য (Strictly determinable):

$$\begin{array}{cc} & \text{খেলোয়াড়-B} \\ \text{খেলোয়াড়-A} & \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \end{array}$$

GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer *all* the following questions 12×3=36

নিম্নলিখিত *সব* প্রশ্নের উত্তর দাও

2. (a) A firm manufacturing two types of medicine A and B, can make a profit of Rs. 20 per bottle of A and Rs. 30 per bottle of B. Both A and B need for their production two essential chemicals C and D. Each bottle of A requires 3 litres of C and 2 litres of D and each bottle of B requires 2 litres of C and 4 litres of D. The total supply of these chemicals are 210 litres of C and 300 litres of D. Type B medicine contains alcohol and its manufacture is restricted to 65 bottles per month. How many bottles each of A and B should the firm manufacture per month to maximize its profit of the products? Formulate the problem as a Linear Programming Problem and solve it graphically. 4+3

একটি প্রস্তুতকারী সংস্থা দুই প্রকার ওষুধ A এবং B তৈরী করে, প্রত্যেক বোতল A-তে 20 টাকা এবং প্রত্যেক বোতল B-তে 30 টাকা লাভ করে। উভয় A এবং B তৈরীর জন্য দুটি প্রয়োজনীয় রাসায়নিক C এবং D প্রয়োজন। প্রত্যেক বোতল A-এর জন্য 3 লিটার C এবং 2 লিটার D এবং প্রত্যেক বোতল B-এর জন্য 2 লিটার C এবং 4 লিটার D প্রয়োজন। C রাসায়নিকের মোট জোগান 210 লিটার এবং D রাসায়নিকের মোট জোগান 300 লিটার। B ওষুধে অ্যালকোহল আছে এবং তার উৎপাদন প্রত্যেক মাসে 65 বোতল পর্যন্ত সীমিত। সংস্থাটিকে সর্বাধিক লাভের জন্য কত বোতল A এবং B তৈরী করতে হবে ? সমস্যাটিকে একটি রৈখিক কার্যকারী সমস্যা (Linear Programming Problem) হিসাবে তৈরী কর এবং লেখচিত্রের সাহায্যে তা সমাধান কর।

(b) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ is a feasible solution to the set of equations $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 7$, $x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$. Reduce the feasible solution to one or more basic feasible solutions. 5

$x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 1$ সমীকরণ সেট $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 7$, $x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 6$-এর সম্ভাব্য সমাধান (Feasible solution)। সম্ভাব্য সমাধানটিকে এক বা অধিক মৌলিক সম্ভাব্য সমাধানে (Basic feasible solution) সংকুচিত (reduce) কর।

3. (a) Solve the following L.P.P using Simplex method: 6

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \text{Subject to} \quad & 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7, \\ & -2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ & -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10, \\ & x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

নিম্নলিখিত এল.পি.পি (L.P.P)-টি সমাধান কর সরলীকৃত পদ্ধতিতে (Simplex method):

সর্বনিম্ন (Minimize) $z = x_1 - 3x_2 + 2x_3$

-এর সাপেক্ষে (Subject to)
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7,$$
$$-2x_1 + 4x_2 \le 12,$$
$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0$$

(b) Find the optimal solution of the following transportation problem. 6

নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির (transportation problem) অনুকূল সমাধান (optimal solution) বের করঃ

	D_1	D_2	D_3	D_4		ai
	8	9	6	3	O_1	18
	6	11	5	10	O_2	20
	3	8	7	9	O_3	18
bj	15	16	12	13		

4. (a) In a game of matching coins with two players, suppose A wins one unit of value when there are two heads, wins nothing when there are two tails and losses $1/2$ unit of value when there are one head and one tail. Determine the payoff matrix, the best strategies for each player and the value of the game to A. 5

দুইজন খেলোয়াড় নিয়ে খেলা মুদ্রা মেলানোর খেলায়, ধর A এক অঙ্ক (1 unit) জিতে যখন সেখানে দুটি হেড (Head), কিছুই জিতে না যখন সেখানে দুটি টেল (tails) এবং অর্ধেক অঙ্ক হারে (loses $1/2$ unit) যখন সেখানে একটি হেড এবং একটি টেল। পরিশোধ ম্যাট্রিক্স (payoff matrix) নির্ণয় কর, প্রত্যেক খেলোয়াড়ের সেরা কৌশল (best strategies) এবং A-এর প্রতি খেলার মান নির্ণয় কর।

(b) Use Big-M method solve the following L.P.P: 7

Maximize $z = x_1 + 5x_2$

Subject to
$$3x_1 + 4x_2 \le 6$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 3$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

বিগ-এম পদ্ধতি (Big-M method) ব্যবহার করে নিম্নলিখিত এল.পি.পি (L.P.P) সমাধান করঃ

সর্বাধিক (Maximize) $z = x_1 + 5x_2$

-এর সাপেক্ষে (Subject to)
$$3x_1 + 4x_2 \le 6$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 3$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0$$

GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer *all* the following questions 7×2 = 14

নিম্নলিখিত *সব* প্রশ্নের উত্তর দাও

5\. (a) Solve the following Assignment Problem: 5

নিম্নলিখিত অর্পিত সমস্যার (assignment Problem) সমাধান করঃ

I	II	III	IV	
5	3	1	8	**A**
7	9	2	6	**B**
6	4	5	7	**C**
5	7	7	6	**D**

(b) Solve graphically the following Game: 2

$$\begin{array}{cc} & \textbf{Player-B} \\ \textbf{Player-A} & \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

নিম্নলিখিত খেলাটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করঃ

$$\begin{array}{cc} & \textbf{খেলোয়াড়-B} \\ \textbf{খেলোয়াড়-A} & \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

6\. Show that the following L.P.P: 7

Maximize $z = 6x_1 + 4x_2$

Subject to $-2x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 - x_2 \le 2$

$3x_1 + 2x_2 \le 9$

and $x_1,\ x_2 \ge 0$

has an infinite number of solutions. Justify your answer.

দেখাও যে নিম্নলিখিত এল.পি.পি (L.P.P):

সর্বাধিক (Maximize) $z = 6x_1 + 4x_2$

-এর সাপেক্ষে (Subject to) $-2x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 - x_2 \le 2$

$3x_1 + 2x_2 \le 9$

এবং $x_1,\ x_2 \ge 0$

-এর অসংখ্য সমাধান আছে। উত্তরের সত্যতা যাচাই কর।

——×——

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 6th Semester Examination, 2021

DSE3-MATHEMATICS

Full Marks: 60

ASSIGNMENT

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains DSE3A and DSE3B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

DSE3A

POINT SET TOPOLOGY

GROUP-A

Answer *all* questions $2\times 5 = 10$

1. (a) Show that sequences are continuous functions. 2

(b) Show that $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$ with their respective standard topologies cannot be homeomorphic. 2

(c) The cofinite topology on a non-empty set X is the collection of subsets whose complements are either finite or all of X. Show that $\mathbb{R}$ with usual topology is not compact but $\mathbb{R}$ with cofinite topology is compact. 2

(d) Find a condition (iff) on a given non-empty set X, so that it becomes compact. 2

(e) Let $X=\{a, b, c, d\}$ be a topological space with the topology $Y=\{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ and $A=\{b, c\}$. Find derived set and interior of A. 2

GROUP-B

Answer *all* questions $10\times 3 = 30$

2. (a) Show that every infinite set has an enumerable subset. 3

(b) Let A be an enumerable set. Let $a\in A$ be fixed. Obtain the set $A'=A\setminus\{a\}$. Show that A and A' are equipotent. 3

(c) Use above two results to prove that a set is infinite if and only if it admits a bijection with a proper subset of itself. 4

3. (a) Let $\phi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ be continuous, consider the graph $G_\phi=\{(x, \phi(x))\,;\; x\in\mathbb{R}\}$ of ϕ as a subspace of $\mathbb{R}^2$. Show that G_ϕ is a homeomorphic copy of $\mathbb{R}$ embedded in $\mathbb{R}^2$. 4

(b) On the set of all positive integers $\mathbb{N}$, show that the metric d defined as $d(m, n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$, $m, n \in \mathbb{N}$ is equivalent to the discrete metric. Show that $\mathbb{N}$ is complete with respect to discrete metric, whereas it is incomplete with respect to d. 3+2+1

4. Let N denote the set of all null sequences of real numbers, that is $N = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\}$. Find closure $\overline{N}$ of N in $\mathbb{R}^\omega$ in both box and product topologies, where $\mathbb{R}^\omega$ denotes the product of countable copies of $\mathbb{R}$. 5+5

GROUP-C

Answer *all* questions 5×2 = 10

5. A topological space is called a Hausdorff space if any two distinct points in the space can be separated by two disjoint open sets. Show that a topological space X is Hausdorff if and only if the diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ is closed in $X \times X$. 5

6. Let $p : X \to Y$ be a closed, continuous and surjective map such that for every point $y \in Y$, $p^{-1}\{y\}$ is compact in X. Show that if Y is compact, then X is compact. 5

GROUP-D

Answer *all* questions 5×2 = 10

7. (a) Investigate the convergence and the possible limit(s) of the sequence $\left\{x_n = \frac{1}{n}\right\}$ in the cofinite topology on $\mathbb{R}$. 2

(b) Show that a topological space is connected if and only if every non-empty proper subset has a nonempty boundary. 3

8. Let X be a connected topological space and $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ is a non-constant continuous map. Show that X is an uncountable set. 5

DSE3B

BOOLEAN ALGEBRA AND AUTOMATA THEORY

GROUP-A

Answer *all* questions 2×5 = 10

1. (a) What is the language generated by the Grammar $(\{S\}, \{a, b\}, \{S \longrightarrow aS, S \longrightarrow bS, S \longrightarrow \epsilon\}, S)$?

(b) Determine all the sub-lattices of D_{30} that contains at least four elements.

(c) Draw the logic circuit $(A'B)'+(A+C)'$.

(d) Show that the weak distributive law $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ holds for any lattice L.

(e) Prove that $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ is not a context free language?

GROUP-B

$10\times3 = 30$

2. (a) For the Grammar = $\{V, T, P, S\}$, where $S \longrightarrow 0B$, $A \longrightarrow 1AA|\epsilon$, $B \longrightarrow 0AA$, construct a parse tree. 4+3+3

(b) Convert the given NFA to equivalent DFA.

δ	0	1
$\longrightarrow p$	$\{p, q\}$	$\{p\}$
q	$\emptyset$	$\{r\}$
r^*	$\{p, r\}$	$\{q\}$

(c) Design a PDA for recognizing the language of palindromes over the alphabet {0, 1}. Draw the computation tree showing all possible moves for the strings 00100 and 00101.

3. (a) Let E and F be finite ordered sets. If $f : E \longrightarrow F$ is a bijection, prove that f is an order isomorphism if and only if $(\forall a, b \in L)\ \ x \prec y \Leftrightarrow f(x) \prec f(y)$, where $x \prec y$ means 'y covers x'. 3+2+3+2

(b) In a distributive lattice $(A, \leq)$, if $a \wedge x = a \wedge y$ and $a \vee x = a \vee y$ for some a then show that $x = y$.

(c) Suppose P be an ordered set with the property: for any $x, y \in P$, $x \wedge y = \text{g. l. b.}(x, y)$ and $x \vee y = \text{l. u. b.}(x, y)$. Prove that $(P, \wedge, \vee)$ is a lattice.

(d) Show that for any elements a, b, c in a modular lattice,

$$(a \vee b) \wedge c = b \wedge c \quad \text{implies} \quad (c \vee b) \wedge a = b \vee a .$$

4. (a) Using the laws of Boolean Algebra, show that 3+3+4

$$[x'.(x+y)]'+[y.(y+x')]'+[y'.(y'+x)]'=1$$

(b) Let $E = xy' + xyz' + x'yz'$. Prove that (i) $xz' + E = E$, (ii) $x + E \neq E$.

(c) Draw the logic circuit that represents the following Boolean function. Find also an equivalent simpler circuit.

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

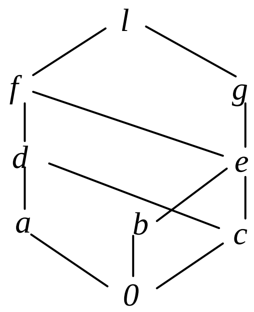
GROUP-C

10×1 = 10

5. (a) Design a DFA that accepts the following languages: 5

$L_1 = \{x \in \{0, 1\}^* : x \text{ ends in } 00\}$ and $L_2 = \{x \in \{0, 1\}^* : x$ contains three consecutive $0's\}$.

(b) Consider the bounded lattice L in the following figure: 5



(i) Find the complements, if they exist, of e and f.

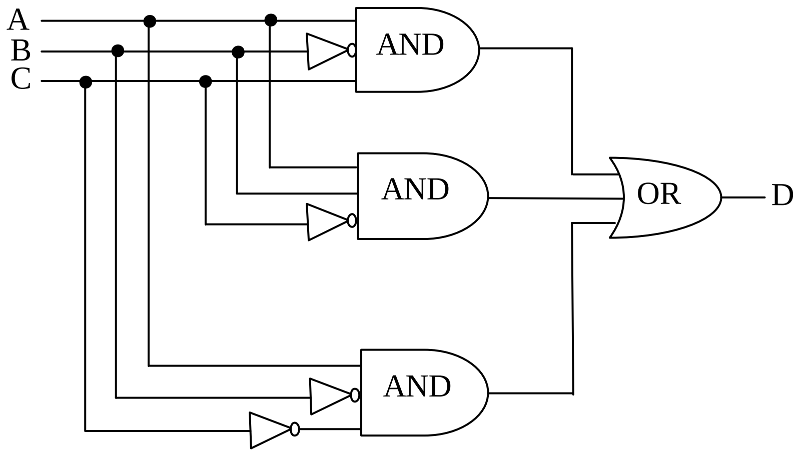
(ii) Is L distributive?

(iii) Describe the isomorphisms of L with itself.

GROUP-D

10×1 = 10

6. (a) Use Karnaugh maps to redesign the following logic circuit so that it becomes a minimal AND-OR Circuit. 6+4



(b) For $\sum = \{a, b\}$, design a Turing machine that accepts $L = \{a^n b^n : n \geq 1\}$. Compute an ID for the string *aabb*.

——×——

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 6th Semester Examination, 2021

DSE4-MATHEMATICS

Full Marks: 60

ASSIGNMENT

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains DSE4A and DSE4B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

DSE4A

DIFFERENTIAL GEOMETRY

GROUP-A

1. Answer ***all*** questions: 2×5 = 10

(a) If $r = r(s)$ be the position vector of a point P with arc length s as the parameter of the curve then show that $\tau = \dfrac{[r', r'', r''']}{|r''|^2}$.

(b) Find the torsion for the curve $r = (u^3 + 3u,\ 3u^2,\ u^3 - 3u)$.

(c) Show that a necessary and sufficient condition for a curve to be straight line is $\kappa = 0$.

(d) Find the envelope of the surface $3xt^2 - 3yt + z = t^3$.

(e) Find the lines of curvature on a plane.

GROUP-B

2. Answer ***all*** questions: 10×3=30

(a) (i) Find the intrinsic equation of the curve $r = (ae^u \cos u,\ ae^u \sin u, be^u)$. 5+5

(ii) Show that the surface $e^z \cos x = \cos y$.

(b) (i) Show that the first fundamental form is invariant under a transformation of parameters. 5+5

(ii) Find the edge of regression of the family of planes $x\sin\theta - y\cos\theta + z = a\,\theta$, where θ is a parameter.

(c) (i) Discuss the nature of geodesics on a sphere. 5+5

(ii) Show that the curves $u+v=$ constant are geodesics on a surface with metric $ds^2=(1+u^2)\,du^2-2uv\,du\,dv+(1+v^2)\,dv^2$.

GROUP-C

3. Answer ***all*** questions: 5×2 = 10

(a) Show that the tangent to the locus of the centre of oscillating sphere passes through the centre of the osculating circle. 5+5

(b) If R_s is the radius of spherical curvature, show that $R_s=\dfrac{|\hat{t}\times\hat{t}''|}{\kappa^2\tau}$.

GROUP-D

4. Answer ***all*** questions: 5×2 = 10

(a) If L, M, N vanish at all points of a surface then the surface is plane, where L, M, N are second fundamental coefficients. 5+5

(b) State and prove the Serret-Frenet formula in matrix form $\hat{e}_i'=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}\hat{e}_j$, where the matrix $A=[a_{ij}]$ is Cartan matrix and $\hat{e}_1\equiv\hat{t}$, $\hat{e}_2\equiv\hat{n}$ and $\hat{e}_3\equiv\hat{b}$.

DSE4B
THEORY OF EQUATION

GROUP-A

1. Answer ***all*** the questions: 2×5 = 10

(a) If one of the roots of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$ equals the sum of the other two, then proved that

$$p^3+8r=4pq$$

(b) Show that the equation of the form

$$\frac{x^4}{4!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}+x+1=0$$

can not have a multiple root.

(c) If α, β, γ be the roots of the equation $x^3+px+q=0$, show that $\sum\alpha^5=5pq$.

(d) Show that x^2-x+1 is a factor of $x^{20}+x^{10}+1$.

(e) If α be an imaginary root of $x^{11}-1=0$, prove that $(\alpha+1)\,(\alpha^2+1)......(\alpha^{10}+1)=1$.

GROUP-B

Answer *all* the questions 10×3=30

2. (a) Find the range of values of r for which the equation $3x^4+8x^3-bx^2-24x+r=0$ has four real and unequal roots. 4+3+3

(b) Find the condition that the equation $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ should have its roots $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ connected by the relation $\alpha+\beta=0$.

(c) Solve the equation $x^3-x^2+3x-27=0$ having three distinct roots of equal moduli.

3. (a) Prove that the roots of the equation $x^3-6x-4=0$ are –2, $2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}$, $2\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{12}$. 4+4+2

(b) Show that the special roots of the equation $x^{10}-1=0$ are the non-real roots of the equation $x^5+1=0$.

(c) Is the equation $x^4-x^3+x^2+x-1=0$ a reciprocal equation? Justify your answer.

4. (a) Solve by Ferrari's method of the equation 4+4+2

$$2x^4+5x^3-8x^2-17x-6=0$$

(b) Prove that $(x^3+1)(x^2-x+1)=a(x^5+1)$ is a reciprocal equation if $a\neq 1$ and solve it when $a=2$.

(c) By Rolle's theorem, find the number and positions of the real roots of the equation $x^3-12x+7=0$.

GROUP-C

5. Answer ***all*** the questions:

(a) The sum of two roots of the equation 5+5

$$x^4-8x^3+19x^2+4\lambda x+2=0$$

is equal to the sum of the other two. Find λ and solve the equation.

(b) Use Sturm's theorem to show that the equation $x^4-3x^3-2x^2+7x+3=0$ has one root between –2 and –1, one root between –1 and 0 and two roots between 2 and 3.

GROUP-D

6. (a) If α, β, γ, δ be the roots of the biquadratic $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$, then find the equation whose roots are 5+5

$$(\beta\gamma+\alpha\delta),\ (\gamma\alpha+\beta\delta),\ (\alpha\beta+\gamma\delta)$$

Hence find the value of

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)$$

(b) Find the equation of the squared differences of the roots of the cubic $x^3+x^2-x=1$. Hence show that two roots of this equation are equal.

——×——

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 6th Semester Examination, 2021

SEC4 (P2)-MATHEMATICS

Full Marks: 60

ASSIGNMENT

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains SEC4A and SEC4B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* Courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

SEC4A

Graph Theory

GROUP-A / বিভাগ-ক

Answer *all* questions $2\times 5 = 10$

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

1. (a) Can a simple graph with 7 vertices be isomorphic to its complement?
7 টি শীর্ষবিন্দু যুক্ত সরল গ্রাফ (simple graph) কি নিজের পূরক (complement)-এর সহিত isomorphic হবে?

(b) Explain why there does not exists a tree having degree sequence 1, 1, 1, 1, 4, 4.
ব্যাখ্যা করঃ 1, 1, 1, 1, 4, 4 ডিগ্রী ক্রম (degree sequence) যুক্ত কোন tree-এর অস্তিত্ব নেই।

(c) Let G be a simple graph of order n such that $\deg(u)\geq(n-1)/2$ for every vertex u of G. Prove that G is connected.
ধর G একটি n অর্ডারের সরল গ্রাফ (simple graph) যেখানে $\deg(u)\geq(n-1)/2$, প্রতিটি u শীর্ষবিন্দুর জন্য। দেখাও যে G একটি সংযুক্ত গ্রাফ (connected graph)।

(d) Show that a graph with 5 vertices and with no loops or parallel edges which has at least 8 edges is Hamiltonian.
দেখাও যে কোন গ্রাফ, যার 5টি শীর্ষবিন্দু এবং কমপক্ষে 8টি বাহু (সমান্তরাল বাহু বা লুপ (loop) নেই) Hamiltonian হবে।

(e) Draw the graph G represented by the given adjacency matrix,
একটি গ্রাফ অঙ্কন কর যেখানে প্রদত্ত adjacency ম্যাট্রিক্স হল

$$A_G=\begin{bmatrix}0&1&2&0\\1&0&1&1\\2&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer *all* questions 12×3 = 36

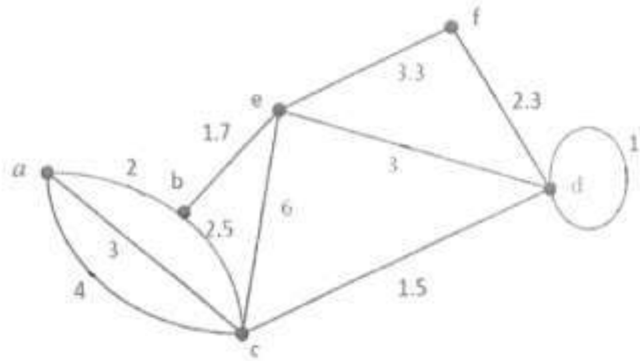
নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

2\. (a) Prove that a simple graph G with n vertices and m components cannot have more than $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+1)$ edges. 4

দেখাও যে n সংখ্যক শীর্ষবিন্দু এবং m সংখ্যক উপাংশযুক্ত (components) কোন সরল গ্রাফের বাহুর সংখ্যা $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+1)$ -এর বেশি হতে পারে না।

(b) Apply Dijkstra's Algorithm to determine a shortest path from a to f in the following graph: 6

Dijkstra's algorithm-এর সাহায্যে নিম্নলিখিত গ্রাফে উপস্থিত শীর্ষবিন্দু a হইতে f বিন্দুর মধ্যবর্তী সবচেয়ে কম দূরত্বের পথটি (shortest path) নির্ণয় করঃ



(c) Prove that a bipartite graph $K_{p,q}$ of order $n \geq 3$ is Hamiltonian if and only if $p = q$. 2

দেখাও যে $n \geq 3$ অর্ডারের একটি bipartite গ্রাফ $K_{p,q}$ Hamiltonian হবে যদি এবং শুধু যদি $p = q$ হয়।

3\. (a) Show that / প্রমাণ করঃ 4

(i) $K_{m,n}$ is a tree if and only if $m = 1$ or $n = 1$.

$K_{m,n}$ একটি tree হবে $\Leftrightarrow$ $m = 1$ অথবা $n = 1$

(ii) K_n is a tree if and only if $n = 1$ or 2.

K_n একটি tree হবে $\Leftrightarrow$ $n = 1$ অথবা $n = 2$

(b) Let T_1 be a tree of order n and size 10 and T_2 be another tree of order $4n-1$. Find the size of T_2. 4

ধর T_1 একটি tree যার অর্ডার n এবং আকার (size) 10 এবং T_2 অপর একটি tree যার অর্ডার $4n-1$। তাহলে T_2 tree-এর আকার (size) নির্ণয় কর।

(c) If a simple regular graph has n vertices and 24 edges, find all possible values of n. 3

যদি একটি সরল regular গ্রাফের n সংখ্যক শীর্ষবিন্দু এবং 24টি বাহু থাকে তবে n-এর সম্ভাব্য মানগুলি নির্ণয় কর।

(d) Prove that the size of K_n is a multiple of n if n is odd. 1

প্রমাণ কর যদি n একটি বিজোড় সংখ্যা হয় তবে K_n -এর আকার (size) n-এর গুণিতক হবে।

4. (a) Give an example of a graph that has neither a Hamiltonian cycle nor a Euler circuit. 2

এমন একটি গ্রাফের উদাহরণ দাও যার মধ্যে Hamiltonian চক্র (cycle) এবং Euler বর্তনী (circuit) কোনটাই থাকবে না।

(b) The adjacency matrix A_G and the incidence matrix I_H of two graphs G and H respectively each with 5 vertices are shown below: 5

5টি শীর্ষবিন্দু যুক্ত দুটি পৃথক গ্রাফ G এবং H-এর যথাক্রমে adjacency মেট্রিক্স A_G এবং incidence মেট্রিক্স I_H নিম্নে প্রদত্তঃ

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I_H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Check whether G and H are isomorphic or not.

তাহলে G এবং H isomorphic হবে কিনা যাচাই কর।

(c) Let G be a self-complementary graph of order n. Show that either $n \equiv 0 \pmod 4$ or $n \equiv 1 \pmod 4$. 3

ধর G একটি n অর্ডারের self-complementary গ্রাফ। দেখাও যে $n \equiv 0 \pmod 4$ অথবা $n \equiv 1 \pmod 4$ হবে।

(d) Let G be a graph of order $n(\geq 6)$. Show that either G or G contains a cycle of length 3. 2

ধর G একটি $n(\geq 6)$ অর্ডারের গ্রাফ। দেখাও যে G নিজে অথবা G-এর মধ্যে 3 দৈর্ঘ্যের চক্র (cycle) থাকবে।

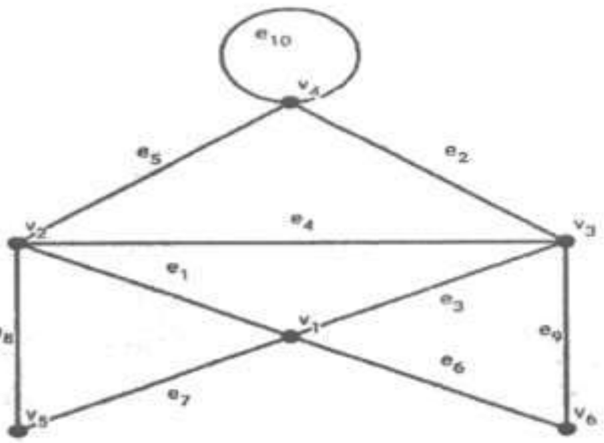
GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer *all* questions $7 \times 2 = 14$

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

5. (a) Check that the following graph is Eulerian or not. If yes then find an Eulerian circuit in it. 5

নিম্নলিখিত গ্রাফটি Eulerian হবে কিনা যাচাই কর। যদি উত্তরটি হ্যাঁ হয় তাহলে ইহাতে একটি Eulerian চক্র (cycle) খুঁজে বের কর।



(b) Prove that the complement of a disconnected graph is connected. 2

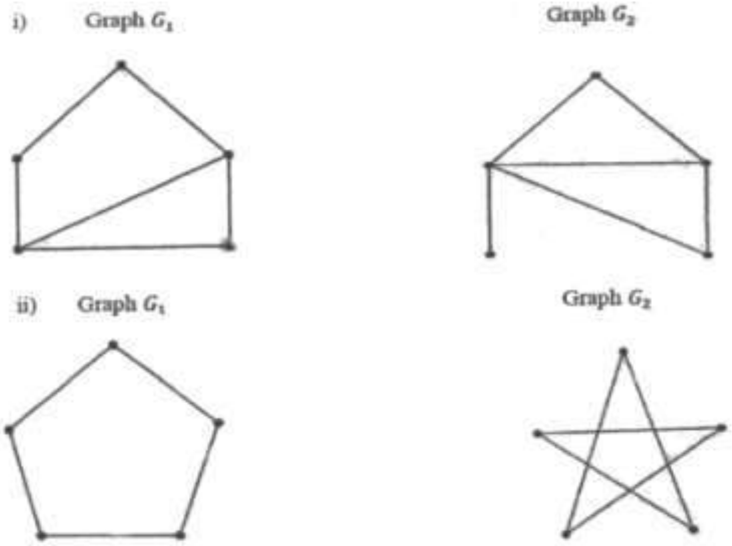
দেখাও যে কোন একটি বিচ্ছিন্ন গ্রাফ (disconnected graph)-এর পূরক (complement) একটি সংযুক্ত (connected) গ্রাফ হবে।

6. (a) Does there exists a graph with 20 edges if each vertex is of degree 3? Justify your answer. 2

যদি প্রতিটি শীর্ষবিন্দুর ডিগ্রী 3 হয় তাহলে 20টি বাহুবিশিষ্ট এমন কোন গ্রাফের অস্তিত্ব পাওয়া যাবে কি ? ইহার উত্তরের যথাযথ যুক্তি দাও।

(b) For the graphs G_1 and G_2, determine whether G_1 is isomorphic to G_2. Justify your answer. 5

নিম্নলিখিত G_1 এবং G_2 গ্রাফদ্বয় isomorphic কিনা উপযুক্ত যুক্তিসহ যাচাই কর।



SEC4B
Boolean Algebra and Automata Theory

GROUP-A / বিভাগ-ক

Answer *all* questions 2×5 = 10

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

1. (a) Construct an FA equivalent to the regular expression $\alpha = (aa+b)^*(aba)^*bab$.

$\alpha = (aa+b)^*(aba)^*bab$ এই স্বাভাবিক রাশি (regular expression)-টির সমতুল্য একটি FA চিত্র অঙ্কন কর।

(b) Show that the power-set lattice $P(U)$ is a distributive lattice for any set U.

যে কোন একটি সেট U এর জন্য দেখাও যে U সেটের power set lattice $P(U)$-টি একটি distributive lattice।

(c) Write down the Block diagram of NOR-Gate.

NOR-গেটের Block diagram-টি উল্লেখ কর।

(d) Show that $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ is not regular.

দেখাও যে $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ স্বাভাবিক (regular) নয়।

(e) Give an example of an infinite lattice L with a finite length.
নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যযুক্ত একটি অসীম lattice L-এর উদাহরণ দাও।

GROUP-B / বিভাগ-খ

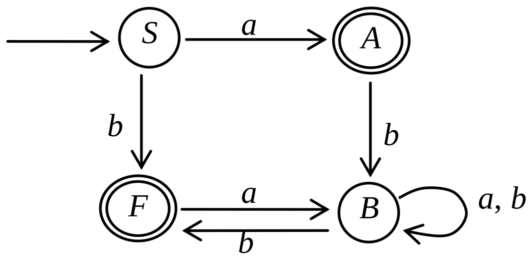
Answer *all* questions 12×3 = 36

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

2. (a) Convert NFA to its equivalent DFA: 4
NFA হইতে সমতুল্য DFA-এ রূপান্তরিত করঃ

Current State	Input symbols a	Input symbols b
$\to q_0$	q_2	q_0
q_1	q_2	q_0, q_1
q_2	q_1, q_f	q_0
q_f	—	—

(b) Find the corresponding regular expression for the FA given in the following figure: 4
নিম্নলিখিত ছবিতে প্রদত্ত FA-এর regular expression-টি নির্ণয় করঃ



(c) Find the language generated by the following grammars: 4
নিম্নলিখিত grammar-গুলি দ্বারা গঠিত ভাষাগুলি সন্ধান করঃ

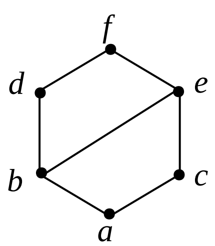
(i) $S \to aSb \mid aXb$ $\quad X \to bX \mid b$

(ii) $S \to aA \mid bS \mid a \mid b$ $\quad A \to bA \mid bS \mid b$

3. (a) Let a and b be two elements in a lattice $(L, \leq)$. Show that $a \wedge b = b$ if and only if $a \vee b = a$. 2
ধর একটি lattice $(L, \leq)$ -এর দুটি উপাদান a এবং b । প্রমাণ কর যে $a \wedge b = b \Leftrightarrow a \vee b = a$ ।

(b) Find (i) the complements of the vertices b and c in the given lattice L. 2
প্রদত্ত lattice L-এর b এবং c শীর্ষবিন্দুর complement-টি নির্ণয় কর।

(ii) the dual of L.
L-এর dual নির্ণয় কর।

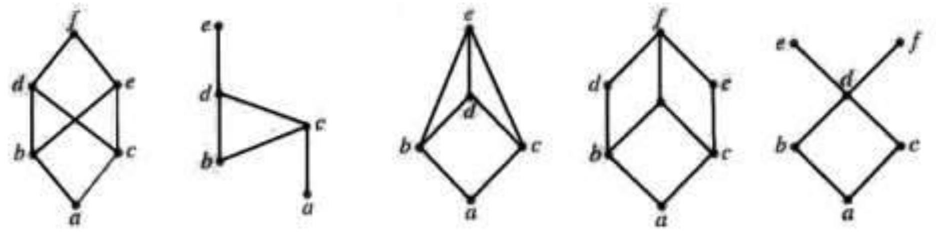


(c) Consider a set $A:=\{2, 3, 4, 8, 12, 36, 48\}$ and let $R:=\{(a,b)\in A\times A:\ a$ is a divisor of $b\}$ be a relation on A. Draw the Hasse diagram and check whether $(A,\ R)$ forms a lattice or not. 3

ধর $A:=\{2, 3, 4, 8, 12, 36, 48\}$ একটি সেট এবং $R=\{(a,b)\,|\,a$ হল b-এর একটি ভাজক$\}$, A সেটটির উপর সম্পর্ক। Hasse লেখচিত্রটি অঙ্কন কর এবং (A, R) একটি lattice গঠন করবে কিনা যাচাই কর।

(d) Which of the following Hasse diagrams represent a lattice? Justify your answer. 5

নিম্নলিখিত কোন কোন Hasse diagram-টি lattice হবে বুঝিয়ে বল।



4. (a) Draw the circuit that represents the following Boolean function. Find also an equivalent simpler circuit. 7

নিম্নলিখিত Boolean অপেক্ষকটির বর্তনী (circuit)-টি অঙ্কন কর এবং ইহার সমতুল্য সরল বর্তনী (simpler circuit)-টি অঙ্কনসহ উল্লেখ করঃ

x	y	z	$f(x,\ y,\ z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

(b) Verify whether the following Boolean expressions α and β are equal or not. 2

নিম্নলিখিত Boolean রাশিদ্বয় α এবং β সমান কিনা যাচাই করঃ

$$\alpha=(x+y)(x+z)\,x'y'\ ,\quad \beta=x+yz$$

(c) Convert the following Boolean expression from DNF to CNF: 3

নিম্নলিখিত Boolean রাশিটির DNF ফর্মটি CNF-এ রূপান্তরিত করঃ

$$abc+ab'c+ab'c'$$

GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer *all* questions 7×2 = 14

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও

5. (a) Use Karnaugh map to find a minimal sum for the following Boolean expression: 4

Karnaugh map-এর সাহায্যে নিম্নলিখিত Boolean রাশিটির minimal sum নির্ণয় করঃ

$$xyz+x'yz+x'y'z+xz$$

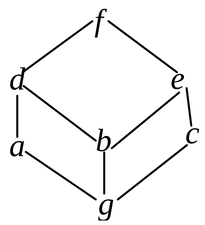
(b) Let the union S of sets $A=\{a_1, a_2, a_3,\cdots\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3,\cdots\}$, $C=\{c_1, c_2, c_3,\cdots\}$ be ordered by: 3

$S=\{A;\ B;\ C\}=\{a_1, a_2, a_3,\cdots, b_1, b_2, b_3,\cdots c_1, c_2, c_3,\cdots\}$. Show that S is not isomorphic to $\mathbb{N}$ with usual order.

$A=\{a_1, a_2, a_3,\cdots\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3,\cdots\}$, $C=\{c_1, c_2, c_3,\cdots\}$ সেট তিনটির Union সেটটির ক্রম (order) $S=\{A;\ B;\ C\}=\{a_1, a_2, a_3,\cdots, b_1, b_2, b_3,\cdots c_1, c_2, c_3,\cdots\}$ । দেখাও যে সাধারণ ক্রম (usual order) এর সাপেক্ষে S সেটটি $\mathbb{N}$ এর সাথে isomorphic হবে না।

6. (a) Consider a partially ordered set L in the following fig. 5

ধর L একটি আংশিক ক্রম সেট (partially ordered set) যা নিম্নলিখিত ছবিতে বর্ণিত।



(i) Show that L forms a lattice.

দেখাও যে L একটি lattice গঠন করে।

(ii) Is L distributive?

এই L lattice-টি distributive কিনা যাচাই কর।

(b) Draw the logic circuit of the Boolean expresssion $A+B'C+A'B'C+A'BC'$. 2

Boolean রাশি $A+B'C+A'B'C+A'BC'$ -এর logical circuit নির্ণয় কর।

——×——