'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Honours 5th Semester Examination, 2021

DSE-P2-MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours | Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains DSE2A and DSE2B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* DSE2 courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

DSE2A

NUMBER THEORY

GROUP-A

1. Answer any ***four*** questions from the following: $3\times 4 = 12$

(a) Use Euclidean Algorithm to obtain integers x and y, such that $\gcd(119,\ 272) = 119x + 272y$. 3

(b) Prove that, $7 \mid (111^{333} + 333^{111})$. 3

(c) Determine whether the following quadratic congruence has a solution or not: 3

$$x^2 \equiv 2 \pmod{71}$$

(d) Solve $34x \equiv 60 \pmod{98}$. 3

(e) Show that $a^{21} \equiv a \pmod{15}$ for all $a \in \mathbb{Z}$. 3

(f) If p_n is the n^{th} prime, prove that $p_n \le 2^{2^{n-1}}$. 3

GROUP-B

Answer any *four* questions from the following $6\times 4 = 24$

2. Prove that the Diophantine Equation $x^4 + y^4 = z^2$ has no solution in integers. 6

3. A certain integer between 1 and 1200 leaves the reminder 1, 2, 6 when divided by 9, 11, 13 respectively. What is the integer? 6

4. For $n > 2$ prove that there exists a prime p such that $n < p < n!$. If p_n be the n^{th} prime number, show that $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{p_n}$ is not an integer. 3+3

5. Find all the positive integral solutions of the following Diophantine equation: 6
$$142x + 20y = 1000$$

6. Show that the equation $6x^2 + 5x + 1 = 0$ has no solution in integers but for every prime p the equation $6x^2 + 5x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ has a solution. 6

7. (a) Evaluate the Legendre symbol $(3658/12703)$. 3
   (b) Show that $5^{38} \equiv 4 \pmod{11}$. 3

GROUP-C

Answer any *two* questions from the following 12×2 =24

8. Prove that there are infinitely many prime numbers and among these infinitely many are of the form $(4k-1)$ for some $k \in \mathbb{Z}$. Show that for a prime p and $n > 2$ the terms of the A.P. $p,\ p+d,\ p+2d,\ \ldots\ldots,\ p+(n-1)d$ will be primes if the common difference d is divisible by every prime $q < n$. 6+6

9. $\alpha, \beta \neq 0$ are two Gaussian integers prove that there exist integers $\mu, \rho \in Z[i]$ such that $\alpha = \mu\beta + \rho$, with $|\rho| < |\beta|$. Show that μ and ρ are not unique. 8+4

10. Show that all solutions of the Pythagorean equation $x^2 + y^2 = z^2$ satisfying $\gcd(x, y, z) = 1$, $2 \mid x$, $x, y, z > 0$ are given by $x = 2st$, $y = s^2 - t^2$, $z = s^2 + t^2$ where $s, t \in \mathbb{Z}$ with $s > t$ $\gcd(s, t) = 1$ and $s \not\equiv t \pmod{2}$. Show that the radius of the incircle of a Pythagorean triangle is always an integer. 6+6

11. (a) Prove that no prime p of the form $4k+3$ is a sum of two squares. 3
    (b) Prove that an odd prime p is expressible as a sum of two square if and only if $p \equiv 1 \pmod{4}$. 9

DSE2B

MECHANICS

GROUP-A

1. Answer any ***four*** questions from the following: 3×4 = 12

   (a) If the resistance per unit mass is $g(\frac{u}{v})^2$, prove that $\frac{du}{ds} = \frac{-g}{v^2}u$, $\frac{d\psi}{ds} = \frac{g}{u^2}\cos^3\psi$, where u is the horizontal component of velocity.

(b) A hemisphere rests in equilibrium on a sphere of equal radius. Show that the equilibrium is unstable when the curved surface of the hemisphere rests on the sphere.

(c) The lengths *AB* and *AD* of the sides of a rectangle *ABCD* are $2a$ and $2b$, show that the inclination to *AB* of one of the principal axes at *A* is $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{3ab}{2(a^2-b^2)}$.

(d) The velocities of a particle along and perpendicular to the radius vector from a fixed origin are λr^2 and $\mu\theta^2$. Show that the path is $\frac{\lambda}{\theta}=\frac{\mu}{2r^2}+c$.

(e) Prove that the resultant turn about the astatic centre through the same angle.

(f) Write down the Kepler's laws of planetary motion.

GROUP-B

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

2. A uniform rod of length $2a$ and weight W rests on a rough horizontal plane (coefficient of friction λ), its weight being uniformly distributed along its length. If the rod is just about to move under the action of force P applied perpendicular to the rod at a distance c from the centre, show that $\frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}-c}=\frac{\lambda W}{P}$. 6

3. Prove that any system of forces acting on a rigid body can be reduced to a single force and a couple whose axis lies along the line of action of the force. 6

4. A particle moves with a central acceleration $\mu\left(r+\frac{c^4}{r^3}\right)$, being projected from an apse at a distance c with a velocity $2\sqrt{\mu}\,c$, prove that its path is $r^2(2+\cos\sqrt{3}\phi)=3c^2$. 6

5. A particle moves freely in a parabolic path given by $y^2=4ax$ under a force which is always perpendicular to its axis. Find the law of force. 6

6. An attracting force, varying as the distance, acts on a particle initially at rest at a distance a. Show that if V be the velocity when the particle is at a distance x and V' be the velocity of the same particle when the resistance of air is taken into account, then $V'=V\left[1-\frac{1}{3}k\frac{(2a+x)(a-x)}{a+x}\right]$ nearly, the resistance of the air being given to be k times the square of the velocity per unit mass, where k is very small. 6

7. A uniform square plane *ABCD* of mass M and side $2a$ lies on a smooth horizontal plane. It is struck at *A* by a particle of mass M' moving with velocity in the direction *AB*, the particle remaining attached to the plate. Determine the subsequent motion of the system and show that its angular velocity is $\frac{M'}{M+4M'}=\frac{3V}{2a}$. 6

GROUP-C

Answer any *two* questions from the following 12×2 =24

8. (a) A particle is projected with velocity V along a smooth horizontal plane in a medium whose resistance per unit mass is μ times the cube of the velocity. Show that the distance it describes in time t is $\frac{1}{\mu V}[(\sqrt{1+2\mu V^2}\,t)-1]$. 4

(b) If ω be the angular velocity of a planet at the nearest of the major axis, prove that its period is $\frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\left\{\frac{1+e}{(1-e)^3}\right\}}$. 3

(c) A particle subject to a central force per unit mass equal to $\mu\{2(a^2+b^2)u^2 - 3a^2b^2u^7\}$ is projected at a distance a with a velocity $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ in a direction of right angle to the distance; show that the path is the curve $r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$. 5

9. (a) A rocket is fired from the earth surface with speed V at an angle α to the radius through the point of projection. Show that the rocket's subsequent greatest distance from the earth's centre is the larger root of the quadratic equation, 6

$$\left(V^2 - \frac{2GM}{R}\right)r^2 + 2GMr - R^2V^2\sin^2\alpha = 0$$

If $V^2 < \frac{2GM}{R}$, where R is the radius and M be the mass of the earth and G is the gravitational constant. Deduce that the escape velocity is independent of α.

(b) Forces P, Q, R act along any three mutually perpendicular generators of the same system of the surface $x^2+y^2 = 2(z^2+a^2)$, the positive direction of the forces being towards the same side of the plane xy. Prove that the pitch of the equivalent wrench is $2a\frac{(PQ+QR+RP)}{P^2+Q^2+R^2}$. 6

10.(a) Two equal forces act along each of the straight lines $\frac{x \mp a\cos\theta}{a\sin\theta} = \frac{y - b\sin\theta}{\mp b\cos\theta} = \frac{z}{c}$; show that their central axis must, for all values of θ, lie on the surface $y\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) = b\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)$. 4

(b) Write down the equation of motion of a particle moving in a central orbit under a central force F and deduce the differential equation of the orbit in the form $\frac{h^2}{P^3}\frac{dP}{dr} = F$, where the symbols have the usual meaning. 4

(c) Show that the equilibrium is stable or unstable according as $\frac{\cos\alpha}{h} \gtrless \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$. Where α is the angle between the common normal and the vertical at the point of contact, h is the height of c.g. from the point of contact and ρ_1, ρ_2 are the radii of curvatures at the point of contact. 4

11.(a) Find the equation of the central axis of a given system of forces. 4

(b) An artificial satellite is circling round the earth at height of 700 km from the surface. Calculate the horizontal velocity of the satellite. 3

(Radius of earth = 6300 km, g = 981 cm/s^2).

(c) AB is a uniform rod of length $6a$ and weight W which can turn freely about a fixed point in its length distance $2a$ from A, AC and BC are light strings of length $5a$ attached to a partial C of weight W'. Show that if W is less than $2W'$, there will be stable equilibrium with AB inclined to the horizontal at an angle $\tan^{-1}\left(\dfrac{W+W'}{4W'}\right)$. 5

——×——

'समानो मन्त्रः समितिः समानी'

UNIVERSITY OF NORTH BENGAL

B.Sc. Programme 5th Semester Examination, 2021

SEC2-P1-MATHEMATICS

Time Allotted: 2 Hours Full Marks: 60

The figures in the margin indicate full marks.
All symbols are of usual significance.

The question paper contains SEC2A and SEC2B. Candidates are required to answer any *one* from the *two* Courses and they should mention it clearly on the Answer Book.

SEC2A

Probability and Statistics

GROUP-A / বিভাগ-ক

Answer any *four* questions from the following 3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

1. (a) Let A and B be two events. Then prove that $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. 3

যে-কোন দুটি ঘটনা A ও B -র জন্য প্রমাণ কর $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ ।

(b) Prove that the following properties: $1\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}$

নীচের সূত্রগুলি প্রমাণ করঃ

(i) $P(\overline{A}+\overline{B})=1-P(AB)$

(ii) $P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(A)+P(B)+P(AB)$

(c) Find the value of k for which 2+1

$$f(x)=\begin{cases} kx(1-x) & ; \quad 0<x<1 \\ 0 & ; \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

is a probability density function. Also find the value of $P(X>\frac{1}{2})$.

ধ্রুবক k-এর মান বের কর যার জন্যে

$$f(x)=\begin{cases} kx(1-x) & ; \quad 0<x<1 \\ 0 & ; \quad \text{অন্যত্র} \end{cases}$$

একটি সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক। এক্ষেত্রে $P(X>\frac{1}{2})$ এর মান নির্ণয় কর।

(d) If the regression lines are $x+6y=6$ and $3x+2y=10$, find the mean and the correlation coefficient. 3

নির্ভরণ সরলরেখা দুটি $x+6y=6$, $3x+2y=10$ হলে গড়গুলি ও সহগতি সহগাঙ্ক নির্ণয় কর।

(e) Find the mean of binomial $\left(4, \frac{1}{4}\right)$ variate. 3

দ্বিপদ $\left(4, \frac{1}{4}\right)$ নিবেশনের গড় নির্ণয় কর।

(f) Prove that $[E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2)$. 3

প্রমাণ কর $[E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2)$ ।

GROUP-B / বিভাগ-খ

Answer any *four* questions from the following 6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন *চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

2. (a) Prove that $P(A_1 + A_2 + ...+ A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + ...+ P(A_n)$.

প্রমাণ কর $P(A_1 + A_2 + ...+ A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + ...+ P(A_n)$ ।

(b) Find the minimum number of times a die has to be thrown such that the probability of no six is less than $1/2$.

ন্যূনতম কতবার একটি ছক্কা ছোড়া হলে ছয় না পড়ার সম্ভাবনা $1/2$ -এর চেয়ে কম ?

(c) The distribution function $F(x)$ of a variate X is defined as follows:

$$F(x) = \begin{cases} A \;; & -\infty < x < -1 \\ B \;; & -1 \le x < 0 \\ C \;; & 0 \le x < 2 \\ D \;; & 2 \le x < \infty \end{cases}$$

where A, B, C, D are constant. Determine the value of A, B, C, D, it being given that $P(X=0) = \frac{1}{6}$ and $P(X>1) = \frac{2}{3}$.

একটি নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ -এর সংজ্ঞা হল

$$F(x) = \begin{cases} A \;; & -\infty < x < -1 \\ B \;; & -1 \le x < 0 \\ C \;; & 0 \le x < 2 \\ D \;; & 2 \le x < \infty \end{cases}$$

যেখানে A, B, C, D ধ্রুবক। A, B, C, D-র মান নির্ণয় কর যদি জানা থাকে যে $P(X=0) = \frac{1}{6}$, $P(X>1) = \frac{2}{3}$, যেখানে X চালকের নিবেশন অপেক্ষক $F(x)$ ।

(d) If X is Poisson distributed with parameter μ, then prove that

যদি X পোয়াসঁ μ -চলক হয়, তবে প্রমাণ কর

$$P(X \le n) = \frac{1}{n!}\int_{\mu}^{\infty} e^{-x} x^n \, dx$$

where n is any positive integer.
যেখানে n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

(e) The joint density function of X and Y is given by 2+2+2=6

$$f(x,\ y) = Kxy\ (0 < x < 1\ ,\ 0 < y < x)$$

Find the value of K. Also find the marginal density functions.
ধ্রুবক K-এর মান নির্ণয় কর যার জন্য

$$f(x,\ y) = Kxy\ (0 < x < 1\ ,\ 0 < y < x)$$

একটি সম্ভাব্য দ্বিমাত্রিক ঘনত্ব অপেক্ষক হয়। প্রান্তিক ঘনত্ব অপেক্ষকগুলি নির্ণয় কর।

(f) (i) Let A and B be two events such that $P(A) = \frac{1}{4},\ P(B/A) = \frac{1}{2}$ and $P(A/B) = \frac{1}{4}$. 4+2
Find $P(\overline{A}/\overline{B})$ and $P(A/B) + P(A/\overline{B})$.
ধরুন A এবং B দুটি ঘটনা যেখানে $P(A) = \frac{1}{4},\ P(B/A) = \frac{1}{2}$ এবং $P(A/B) = \frac{1}{4}$। তাহলে $P(\overline{A}/\overline{B})$ এবং $P(A/B) + P(A/\overline{B})$ -এর মান নির্ণয় কর।

(ii) Find the median for the Poisson distribution having mean 2.
যদি Poisson distribution-এর mean 2 হয় তাহলে ইহার median টি নির্ণয় কর।

GROUP-C / বিভাগ-গ

Answer any *two* questions from the following 12×2=24
নিম্নলিখিত যে-কোন *দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও

3. (a) Show that acute angle θ between the least square regression lines is given by 6+3+3

$$\tan\theta = \frac{1-\rho^2}{\rho}\cdot\frac{\sigma_x\,\sigma_y}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$$

and discuss the case $\rho = 0$ and $\rho = \pm 1$.
দেখাও যে লঘিষ্ঠ বর্গ নির্ভরণ সরলরেখা দুটির মধ্যে সূক্ষ্মকোণ θ হলে

$$\tan\theta = \frac{1-\rho^2}{\rho}\cdot\frac{\sigma_x\,\sigma_y}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$$

$\rho = 0$ এবং $\rho = \pm 1$ হলে θ-এর মান ও তার ব্যাখ্যা কী ?

(b) (i) State and prove the Tchebycheff's inequality. (2+4)+6
চেবিশেফের অসমতার কথা বল ও প্রমাণ কর।

(ii) The distribution of a random variable X is given by

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{8}\quad ,\quad P(X = 0) = \frac{3}{4}$$

Verify Tchebycheff's inequality for this distribution.
একটি বিচ্ছিন্ন চলক X-এর নিবেশনে

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{8}\quad ,\quad P(X = 0) = \frac{3}{4}$$

এই নিবেশনের জন্য চেবিশেফের অসমতা যাচাই কর।

(c) (i) State and prove Bayes' theorem. (2+4)+6

ব্যেজের উপপাদ্যটি লিখুন ও বর্ণনা কর।

(ii) There are three identical urns containing white and black balls. The first urn contains 2 white and 3 black balls, the second urn 3 white and 5 black balls, and the third urn 5 white and 2 black balls. An urn is chosen at random, and a ball is drawn from it. If the ball drawn is white, what is the probability that the second urn is chosen?

তিনটি একরকম পাত্রে সাদা ও কালো বল আছে। প্রথমটিতে ২টি সাদা ও ৩টি কালো, দ্বিতীয়টিতে ৩টি সাদা ও ৫টি কালো এবং তৃতীয়টিতে ৫টি সাদা ও ২টি কালো বল আছে। একটি পাত্র যদৃচ্ছভাবে নির্বাচন করা হল এবং তার থেকে একটি বল টানা হল। বলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা কত ? যদি বলটি সাদা হয়, তাহলে দ্বিতীয় পাত্রটি নির্বাচন করার সম্ভাবনা কত ?

(d) (i) Probability density function of a random variable X be (2+2+2+2)+4

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{40}e^{-x/40} & \text{if } x\ge 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

Find the values of $P(X\le 15)$, $P(40<X\le 50)$, $P(X>10)$, $P(-\infty<X<0)$.

একটি চলক X-এর সম্ভাবনা ঘনত্ব অপেক্ষক হল

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{40}e^{-x/40} & \text{if } x\ge 0\\ 0 & \text{অন্যত্র}\end{cases}$$

এক্ষেত্রে মান নির্ণয় কর

$P(X\le 15)$, $P(40<X\le 50)$, $P(X>10)$, $P(-\infty<X<0)$

(ii) If X be a $\beta_2(l,\, m)$ variate then show that $Y=\dfrac{1}{X}$ is a $\beta_2(m,\, l)$ variate.

যদি X একটি $\beta_2(l,\, m)$ চলক হয়, তাহলে $Y=\dfrac{1}{X}$ একটি $\beta_2(m,\, l)$ চলক।

SEC2B

Differential Geometry

GROUP-A / বিভাগ-ক

1. Answer any ***four*** questions from the following: 3×4 = 12

নিম্নলিখিত যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) For the curve $r=[3u,\, 3u^2,\, 2u^3]$, show that $\dfrac{1}{\kappa}=\dfrac{1}{\tau}=\dfrac{3}{2}(1+2u^2)^2$.

$r=[3u,\, 3u^2,\, 2u^3]$ এই বক্রের জন্য দেখাও যে $\dfrac{1}{\kappa}=\dfrac{1}{\tau}=\dfrac{3}{2}(1+2u^2)^2$ ।

(b) Show that for a circular helix, the principal normal is perpendicular to the generators of the cylinder.

একটি বৃত্তাকার helix-এর জন্য দেখাও যে, প্রধান অভিলম্বটি চোঙের generators গুলোর উপর লম্ব হবে।

(c) Show that the surface $e^z \cos x = \cos y$ is minimal.

প্রমাণ কর যে $e^z \cos x = \cos y$ পৃষ্ঠতলটি সর্বনিম্ন হবে।

(d) Find the envelope of the family of planes $3xa^2 - 3ay + z = a^3$.

$3xa^2 - 3ay + z = a^3$ সমতলগুচ্ছের envelope নির্ণয় কর।

(e) For a given curve $r = r(u)$, show that $\kappa = \dfrac{\sqrt{|\ddot{r}|^2 - \ddot{s}^2}}{\dot{s}^2}$, s is a parameter $(\cdot \equiv \frac{d}{du})$.

$r = r(u)$ (u একটি প্যারামিটার) বক্রটির জন্য দেখাও যে, $\kappa = \dfrac{\sqrt{|\ddot{r}|^2 - \ddot{s}^2}}{\dot{s}^2}$, যেখানে s একটি প্যারামিটার ও '$\cdot$' $\equiv \frac{d}{du}$) ।

(f) Find $\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$ for the curve $r = (a\cos u,\, b\sin u,\, 0)$.

নিম্নলিখিত বক্রের জন্য স্পর্শক ও অভিলম্ব ($\hat{\boldsymbol{t}}$, $\hat{\boldsymbol{n}}$) ভেক্টরের মান নির্ণয় করঃ

$$r = (a\cos u,\, b\sin u,\, 0)$$

GROUP-B / বিভাগ-খ

2. Answer any ***four*** questions from the following: 6×4 = 24

নিম্নলিখিত যে-কোন ***চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) Prove that the asymptotic lines are orthogonal if and only if the surface is minimal. Find the asymptotic lines on the surface $z = y\sin x$. 3+3

প্রমাণ কর যে, অসীম রেখাগুলি (asymptotic lines) সমকোণীয় (orthogonal) হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি পৃষ্ঠতলটি সর্বনিম্ন হয়। $z = y\sin x$ পৃষ্ঠতলের উপর অসীম রেখাগুলি নির্ণয় কর।

(b) Find the arc length of the curve $x = 3\cosh 2t,\ y = 3\sinh 2t,\ z = 6t$ from $t = 0$ to $t = \pi$. 3+3

Find the parametric representation of $x^3 + y^3 + 3xy = 0$.

$x = 3\cosh 2t,\ y = 3\sinh 2t,\ z = 6t$ বক্রের $t = 0$ থেকে $t = \pi$ পর্যন্ত বক্রের চাপ দৈর্ঘ্য (arc length) নির্ণয় কর। $x^3 + y^3 + 3xy = 0$ এর প্যারামেট্রিক উপস্থাপনা নির্ণয় কর।

(c) Show that the radius of spherical curvature of a circular helix $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = a\theta\cot\alpha$ is equal to the radius of circular curvature. 3+3

If R is the radius of the spherical curvature, show that $R = \left|\dfrac{\hat{t} \times \hat{t}''}{\kappa^2 \tau}\right|$.

দেখাও যে, একটি বৃত্তাকার helix $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $z = a\theta\cot\alpha$ -এর গোলাকার বক্রতার ব্যাসার্ধ, বৃত্তাকার বক্রতার ব্যাসার্ধের সমান। প্রমাণ কর $R = \left|\dfrac{\hat{t} \times \hat{t}''}{\kappa^2 \tau}\right|$, যেখানে R গোলাকার বক্রতার ব্যাসার্ধ চিহ্নিত করে।

(d) Find the involutes and evolutes of the curves $r = [a\cos u,\, a\sin u,\, au\tan\alpha]$. 3+3

$r = [a\cos u,\, a\sin u,\, au\tan\alpha]$ বক্রের involutes এবং evolutes নির্ণয় কর।

(e) For any curve $r = r(s)$, prove that $r''' = -\kappa^2\hat{\boldsymbol{t}} + \kappa'\hat{\boldsymbol{n}} + \kappa\tau\hat{\boldsymbol{b}}$. Hence show that $\hat{\boldsymbol{b}} = \dfrac{r' \times r''}{|r' \times r''|}$. 3+3

$r = r(s)$ একটি বক্র। প্রমাণ কর যে, $r''' = -\kappa^2\hat{\boldsymbol{t}} + \kappa'\hat{\boldsymbol{n}} + \kappa\tau\hat{\boldsymbol{b}}$ যেখানে ‘ · ’ $\equiv \dfrac{d}{ds}$ এবং প্রমাণ কর যে, $\hat{\boldsymbol{b}} = \dfrac{r' \times r''}{|r' \times r''|}$ ।

(f) Find the parametric direction and angle between parametric curves. 3+3

প্যারামেট্রিক বক্রগুলির মধ্যে প্যারামেট্রিক দিক এবং কোণ নির্ণয় কর।

GROUP-C / বিভাগ-গ

3. Answer any ***two*** questions from the following: 12×2=24

নিম্নলিখিত যে-কোন ***দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাওঃ

(a) (i) Show that the curve $r = r(s)$ is asymptotic line if and only if $\dfrac{dr}{ds} \cdot \dfrac{dN}{ds} = 0$, where N is surface normal. Write the necessary and sufficient condition for a curve to be a geodesic. (4+2)+(4+2)

দেখাও যে $r = r(s)$ বক্রটি অসীম রেখা হবে যদি এবং কেবলমাত্র $\dfrac{dr}{ds} \cdot \dfrac{dN}{ds} = 0$ হয়, যেখানে N পৃষ্ঠতল অভিলম্ব। একটি বক্র, geodesic হবার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত নির্ণয় কর।

(ii) Find the necessary and sufficient condition for a surface $z = f(x, y)$ to represent a developable surface. Prove that the surface $xy = (z - c)^2$ is developable.

একটি পৃষ্ঠ $z = f(x, y)$, একটি developable পৃষ্ঠ হবার প্রয়োজনীয় ও পর্যাপ্ত শর্ত নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, $xy = (z - c)^2$ পৃষ্ঠটি developable ।

(b) (i) Define first fundamental form. Prove that the first fundamental form is invariant under a transformation of parameters. (1+5)+(5+1)

প্রথম মৌলিক গঠনের (first fundamental form) সংজ্ঞা দাও। প্রমাণ কর যে, প্রথম মৌলিক গঠনটি, প্যারামিটারের রূপান্তরের অধীনে অপরিবর্তীয়।

(ii) If (l, m) and (l', m') are the direction coefficients of two directions at a point P, then show that $\tan\theta = \dfrac{H(lm' - ml')}{Ell' + F(lm' + ml') + Gmm'}$.

Define normal curvature.

যদি একটি বিন্দু P এর উপর (l, m) এবং (l', m') দুটি দিকের (direction) দিক সহগ (direction coefficients) হয়, তাহলে দেখাও যে, $\tan\theta = \dfrac{H(lm' - ml')}{Ell' + F(lm' + ml') + Gmm'}$

নরম্যাল বক্রতার (normal curvature) সংজ্ঞা দাও।

(c) (i) Define osculating plane, rectifying plane. Find the osculating plane at the point t on the helix $r = (a\cos t,\ a\sin t,\ ct)$. (2+4)+(4+2)

Osculating সমতল ও rectifying সমতলের সংজ্ঞা দাও। $r = (a\cos t,\ a\sin t,\ ct)$ helix এর কোন বিন্দু t এর জন্য osculating সমতল নির্ণয় কর।

(ii) Find the normal curvature of the right angular helicoid $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = cv$ at a point on it. State the Serret-Frenet formulae.

$x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = cv$ right angular helicoid-এর উপর কোন একটি বিন্দুতে নরম্যাল বক্রতার মান নির্ণয় কর। Serret-Frenet-এর ফরমূলাটি লেখ।

(d) (i) Find the principal directions and the principal curvature on the surface $x = a(u+v),\ \ y = b(u-v),\ \ z = uv$. 6+(4+2)

পৃষ্ঠ $x = a(u+v),\ \ y = b(u-v),\ \ z = uv$ এর উপর প্রধান দিক (principal directions) এবং প্রধান বক্রতা (principal curvature) নির্ণয় কর।

(ii) Prove that the curves $\dfrac{v^3}{u^2} =$ constant are geodesics on a surface with metric $v^2du^2 - 2uv\,du\,dv + 2u^2\,dv^2\ \ (u > 0,\ v > 0)$.

State Rodrigue's formula.

প্রমাণ কর যে, $v^2du^2 - 2uv\,du\,dv + 2u^2\,dv^2\ \ (u > 0,\ v > 0)$ মেট্রিকযুক্ত পৃষ্ঠের geodesic গুলি হল $\dfrac{v^3}{u^2} =$ ধ্রুবক বক্রসমষ্টি।

Rodrigue -এর ফরমূলা লেখ।

——×——